Johann Michael Schirmer
Schul- Schreib- und Rechenmeisters in Frankfurt am Main

selbstlehrende Algebra

das ist

gründliche Anweisung

wie ein jeder
welcher die gemeine Rechenkunst verstehet
diese vortrefliche Wissenschaft
ohne mündlichen Unterricht
lernen
und mittelst derselben
alle schwere Rechnungsvorfälle
die sich sowohl bei dem Militare, der Handlung und den Künsten
als auch überhaupt im gemeinen Leben
ereignen
fertig und ohne Schwierigkeit
auflösen kan
mit einem nüzlichen Register

---

zweite Abtheilung

Frankfurt am Main
in der Andreäischen Buchhandlung 1779.

Diese zweite Abtheilung kostet bei dem Verleger

48 Kreuzer.

Selbstlehrende Algebra

---

zweite Abtheilung

Von den

Verhältnissen und Proportionen überhaupt.

§. 267.

Wann zwo ungleiche Zahlen gegeneinander gehalten und miteinander verglichen werden, so nennet man ihren Unterschied ein Verhältnis, der Unterschied selbsten aber wird entweder nach der Subtraction oder Division betrachtet.

§. 268. Siehet man bei dem Unterschied auf die Subtraction, um wie viel nemlich eine Zahl grösser oder kleiner sei, als die andere, so heisset es ein arithmetisches Verhältnis; wird aber dabei auf die Division gesehen, um wie vielmahl eine grössere Zahl grösser sei, als eine Kleinere, oder wie vielmahl eine kleinere Zahl in einer Grössern enthalten, so wird es ein geometrisches Verhältnis genant.

Z. E. Wann die Zahlen 4 und 12 nach der Subtraction betrachtet werden, so ist zwischen denselben ein arithmetisches

Verhältnis, nach welchem 4 um 8 kleiner ist als 12, oder: 12 um 8 grösser ist als 4; daferne man aber dabei auf die Division siehet, so ist zwischen ihnen ein geometrisches Verhältnis, vermög welchem 12 dreimahl so gros ist als 4, oder: 4 in 12 dreimahl enthalten ist.

§. 269. Werden also Zahlen gegeneinander verglichen, so verstehet es sich von selbsten, daß solche ihrem Wesen nach von einerlei Art und Beschaffenheit sein müssen.

Z. E. Zahlen müssen gegen Zahlen, Pfund gegen Pfund, Ehlen gegen Ehlen, u. s. f. verglichen werden.

§. 270. Es geschiehet zwar öfters, daß man auch ungleiche Dinge nach ihrem Verhältnis gegeneinander betrachtet, alleine es werden dieselbige alsdann nicht nach ihrem Werth, sondern nach ihren Zahlen behandelt.

Z. E. Wann 6 Ehlen gegen 8 Thaler gehalten werden, so wird nur auf die Zahlen 6 und 8 gesehen.

§. 271. So werden auch öfters zwo Zahlen nach ihrem Verhältnis gegeneinander verglichen, welche zwar ihrem Wesen nach, nicht aber in Ansehung ihrer Einten, einander gleich sind, sie werden aber in solchen Fällen erst entweder gleichnahmig resolvirt oder reducirt.

Z. E. Wann 24 kr. und 4 fl. gegeneinander verglichen werden sollen, so werden entweder die fl. zu kr. resolvirt, oder die kr. zu grössern Theilen eines fl. reducirt, als:

24 kr. 4 fl.
60
―――――――
24 . 240

oder: 24 kr. 4 fl.
―――――――
2 . 20. Dann 24 kr. sind 2 Fünftel, und 4 fl. sind 20 Fünftel.

§. 272.

§. 272. Gleiche Bewandnis hat es, wann sich ein- oder anderseits Brüche befinden, da solche gleichnahmig resolviret oder gegrössert werden müssen (§. 127 u. f.).

Z. E.	Item:	It.	It.
$\frac{3}{4}$. 6	$\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$
3 . 24	3 . 4	$\frac{3}{2}$. $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$. $\frac{7}{3}$
	5 . 4	3 . 2	3 . 7
	15 . 16	3 . 2	3 . 2
		9 . 4	9 . 14

§. 273. Man hat also bei einem Verhältnis mit einer grössern und mit einer kleinern Zahl, welche **Glieder** des **Verhältnisses** heissen, und mit dem **Unterschied** derselben zu thun, wobei das erste Glied **Antecedens**, oder das Vorstehende, das andere Glied **Consequens**, oder das Nachstehende, und der Unterschied zwischen beiden Gliedern, wann es das arithmetische Verhältnis betrift, **Differenz**, und so es das geometrische Verhältnis ist, **Exponent**, oder Angeber, heisset, wiewohl hier mehrentheils das Wort **Verhältnis** gebrauchet wird.

§. 274. Bei Aufsuchung eines **Verhältnisses** ist **zu merken**, daß die Zahl oder Grösse, mit welcher man eine Vergleichung vornehmen wil, und von der die Frage ist, zum zweiten Saz, und die andere Zahl, gegen welche jene verglichen werden sol, zum ersten Saz genommen werde, und bei einem **arithmetischen Verhältnis** der kleinere Saz der **Subtractor**, bei einem **geometrischen Verhältnis** aber der zweite Saz allezeit der **Divisor** sei.

Z. E. Wann nach dem arithmetischen Verhältnis gefragt würde: wie sich 12 gegen 4 verhielte? so wäre die Formel und Procedur also:

$$\begin{array}{ll} 4 \;. & 12 \\ & -4 = 8 \end{array}$$

das ist: 12 ist um 8 mehr als 4, mithin ist 8 die Differenz.

Oder: Es würde nach eben diesem arithmetischen Verhältnis gefragt: wie sich 4 gegen 12 verhalte? so wäre die Aufsuchung also:

$$\begin{array}{r} 12 \;\cdot\; 4 \\ -4 = 8 \end{array}$$

das ist: 4 ist um 8 kleiner als 12, mithin ist 8 rükweegs die Differenz.

Item: Wann nach dem geometrischen Verhältnis gefragt würde: wie sich 12 zu 4 verhalte? so würde also verfahren:

$$\frac{4 \;\cdot\; 12}{\frac{4}{12} \text{ d. i. } \frac{1}{3}}$$

Also verhält sich 12 zu 4, wie 3 zu 1, oder: 12 ist in 4 $\frac{1}{3}$mahl enthalten, folglichen ist die Benennung oder das Verhältnis $\frac{1}{3}$.

Oder: Es würde nach eben diesem geometrischen Verhältnis gefragt: wie sich 4 zu 12 verhalte? so ist die Aufsuchung also:

$$\frac{12 \;\cdot\; 4}{\frac{12}{4}, \text{ d. i. } \frac{3}{1}}$$

Also verhält sich 4 zu 12, wie 1 zu 3, oder: 4 ist in 12 3mahl enthalten, mithin ist die Benennung oder das Verhältnis 3.

§. 275. **Sind zwei Verhältnisse entweder in Ansehung der Subtraction oder der Division einander gleich, so machen dieselbige im ersten Fall eine arithmetische, im andern Fall aber eine geometrische Proportion, und die Glieder sothaner Proportion heissen alsdann Proportionalzahlen, wovon das Eigentliche hiernächst folget.**

Z. E. Zwischen 4 und 6 und zwischen 8 und 10 sind die Verhältnisse 2, mithin machen die Glieder dieser beiden Verhältnissen (§. 273) eine arithmetische Proportion.

Item: Zwischen 4 und 6 und zwischen 8 und 12 sind die geometrische Verhältnisse $\frac{2}{3}$, folglichen machen die Glieder dieser beiden Verhältnissen (§. ibid.) eine geometrische Proportion.

Von

Von den
arithmetischen Verhältnissen
und
Proportionen
insbesondere.

§. 276.

Wann bei einem arithmetischen Verhältnis (§. 268) das erste Glied kleiner ist, als das zweite, so ist das erste Glied und die Differenz gleich dem zweiten Glied.

Z. E.	8	.	12
Differenz:	4		
	12	=	12

§. 277. Dieses allgemein, d. i. mit Buchstaben vorzustellen, könte man sich zwar, wie bisher, der ersten Buchstaben bedienen (§. 6).

Z. E. Das kleinere Glied könte a und die Differenz b heissen, so wären die beiden Glieder:

$$a \;.\; a+b$$

Wird nun die Differenz zum kleinern Glied addirt, so hat man die Formel:

$$a+b=a+b$$

mit welcher alle mögliche Zahlen vorgestellet werden können (§. 12).

§. 278. Weil es aber, wie man in der Folge erkennen wird, nöthig ist, daß der Buchstab, welcher die Differenz vorstellen sol, vor jenen Buchstaben besonders käntlich sei, so nimt man dafür m (§.10), nach welchem die Formel also komt:

$$\frac{a \quad . \quad a+m}{a+m = a+m}$$

§. 279. Ist aber bei einem arithmetischen Verhältnis das erste Glied grösser, als das Zweite, so ist alsdann dieses Glied dem Rest gleich, wann die Differenz vom ersten Glied subtrahirt wird:

Z. E. $\begin{array}{c} 12 \quad . \quad 8 \\ -4 \quad\quad \\ \hline 8 = 8 \end{array}$

Allgemein: $\frac{a \quad . \quad a-m}{a-m = a-m}$

§. 280. Zu den Gliedern eines arithmetischen Verhältnisses können alle mögliche gleiche Zahlen addirt werden, ohne die Differenz oder das Verhältnis dadurch zu verändern.

Z. E. Bei 8 und 12 ist die Differenz 4
Addirt man 6 6

14 . 18, so ist die Differenz noch 4

Allgemein: $a \quad . \quad a+m$, die Differenz ist m.

Zu jedem Glied b add. $a+b \,.\, a+b+m$, die Differenz ist noch m.

Hier siehet man, daß es, wie gedacht (§.278), nöthig ist, die Differenz mit einem entfernten Buchstaben zu bezeichnen, weil die Erstere eine gewisse Verbindung miteinander haben, dabei sich eine fremde Sache und Benennung, als wie hier die Differenz, nicht unterscheiden würde.

§. 281. So bleibet auch ein arithmetisches Verhältnis ohnveränderlich, wann von den Gliedern gleiche Zahlen subtrahirt werden.

Z. E. Bei 12 und 8 ist die Differenz 4
Subtrahirt man: — 6 . — 6

6 . 2, so ist die Differenz noch 4

Allgemein: $a \,.\, a+m$

$a-b \,.\, a-b+m$

§. 282. Werden die Glieder eines arithmetischen Verhältnisses gleich multiplicirt, d. i. zwei= drei= und mehrmahlen genommen, so wird das Verhältnis ebenfals um so vielfach mehr.

Z. E. Bei 8 und 12, ist die Differenz 4
Multiplicirt man mit 3 3

24 . 36, so ist die Differ. auch 3mahl 4, nemlich 12

Allgemein: $a \,.\, a+m$

$an \,.\, an+mn$

Da hier Verhältnis und Differenz multiplicirt werden müssen, so wurde zum Multiplicator n genommen, woraus abermahl die Nothwendigkeit erhellet, die mitlere Buchstaben zu gebrauchen (§. 280).

§. 283. Sind zwei arithmetische Verhältnisse einander gleich, so nennet man solche ähnlich, und diese Aehnlichkeit eine arithmetische Proportion (§. 275).

Z. E. Die Verhältnisse zwischen 2 und 4 und zwischen 5 und 7 sind 2, mithin machen die Glieder eine arithmetische Proportion, welche also bezeichnet wird:

2 . 4 = 5 . 7

Allgemein: $a \,.\, a+m = b \,.\, b+m$

Hier wurden die Glieder des ersten Verhaltnisses 2 . 4, wie vorhin bezeichnet (§. 277 u. f.); bei dem zweiten Verhältnis 5 . 7 aber musten dieselbigen, wegen des Unterschieds, mit andern Buchstaben, und zwar das Kleinste mit b und das Grössere mit $b+m$ benennet werden.

§. 284. Solchemnach enthält eine arithmetische Proportion vier Glieder oder Proportionalzahlen (§. 275), welche also beschaffen sein müssen, daß die Summe der Aeussern gleich sei der Summe der Mittlern.

Z. E. $\frac{2 . 4 = 5 . 7}{9 = 9}$

Allgemein: $\frac{a \; . \; a + m = b \; . \; b + m}{a + b + m = a + b + m}$

dann a und $b + m$ sind die äussern, und $a + m + b$, oder $a + b + m$ sind die mittlern Glieder.

§. 285. **Ist bei einer arithmetischen Proportion das dritte Glied dem Zweiten gleich, so hat man in sothaner Proportion nur drei Zahlen, welche also beschaffen sein müssen, daß der Unterschied zwischen denselben gleich sei.**

Z. E. 4 . 8 = 8 . 12

Hier ist das dritte Glied 8 dem zweiten Glied 8 gleich, dahero die Bezeichnung also ist:

4 . 8 . 12

Allgemein mit 4 Gliedern:

$a \; . \; a + m = a + m \; . \; a + 2m$

Weil das dritte Glied dem zweiten Glied gleich ist, so muß es auch mit diesem gleich bezeichnet sein, nehmlich: $a + m$, und weil ferner das vierte Glied dem dritten Glied, d. i. $a + m$, um den Unterschied mehr sein muß, so ist die Benennung desselben: $a + 2m$.

Mit 3 Gliedern:

$a \; . \; a + m \; . \; a + 2m$

Das ist: a ist um m kleiner, als das zweite Glied: $a + m$, und dieses ist um m kleiner, als das dritte Glied: $a + 2m$.

§. 286. **Den Unterschied zwischen dieser und der vorhergehenden arithmetischen Proportion (§. 283 u. f.) pfleget man also zu bemerken, daß jene eine discrete, d. i. eine unter-**

unterbrochene, diese aber eine continuirliche, d. i. eine stete oder ohnunterbrochene arithmetische Proportion genennet wird.

§. 287. Bei einer discreten arithmetischen Proportion (§. 284) kan das erste und zweite, und das dritte und vierte Glied miteinander verwechselt werden, ohne daß die Proportion verrükt wird, welches auch bei einer continuirlichen Proportion geschiehet, wann solche nehmlich in vier Gliedern bezeichnet wird (§. 285).

Z. E. $2 . 4 = 5 . 7$ Da die Glieder der beiden Verhältnisse (§. 283) umgewandt werden.
$4 . 2 = 7 . 5$
$2 . 4$
$9 . 9$ Summen der äussern und mitlern Glieder zum Beweis nach §. 284.

Item: $2 . 4 = 4 . 6$ Umgewandt, wie vorhin.
$4 . 2 = 6 . 4$
$2 . 4$
$8 . 8$ Summen der äussern u. mitlern Glieder.

Allgemein: $a . a + m = b . b + m$ Umgewandt:
$a + m . a = b + m . b$
$a + m + b = a + b + m$ Gleiche Summen.

Item: $a . a + m = a + m . a + 2m$ Umgewandt:
$a + m . a = a + 2m . a + m$
$2a + 2m = 2a + 2m$ Gleiche Summen.

Dann das erste und lezte Glied ist $a + m$, mithin solche addirt, komt: $2a + 2m$, und die beide Mitlere sind: a und $a + 2m$, folglichen thun solche auch $2a + 2m$.

§. 288. Eben so können bei vorhergehenden beiden arithmetischen Proportionen das erste und vierte, oder das

das zweite und dritte Glied miteinander verwechselt werden, ohne die Proportion zu verrüken.

Als: $2 . 4 = 5 . 7$ Verwechselung der beiden äussern Glieder.

$7 . 4 = 5 . 2$

$4 . 7$

$9 . 9$ Summen.

Item: $2 . 4 = 5 . 7$ Verwechselung der beiden mitlern Glieder.

$2 . 5 = 4 . 7$

$5 . 2$

$9 . 9$ Summen.

Item: $2 . 4 = 4 . 6$ Verwechselung der beiden äussern Glieder.

$6 . 4 = 4 . 2$

$4 . 6$

$8 . 8$ Summen.

Bei den beiden mitleren Gliedern findet keine Verwechselung statt.

Allgemein: $a . a + m = b . b + m$ Verwechselung der beiden äussern Glieder.

$b + m . a + m = b . a$

$b + m + a = a + m + b$ Summen.

Item: $a . a + m = b . b + m$ Verwechselung der beiden mitlern Glieder.

$a . b = a + m . b + m$

$a + b + m = a + b + m$ Summen.

Item: $a . a + m = a + m . a + 2m$ Verwechselung der beiden äussern Glieder.

$a + 2m . a + m = a + m . a$

$2a + 2m = 2a + 2m$ Summen.

Bei den beiden mitlern Gliedern findet keine Verwechselung statt.

§. 289.

§. 289. Da bei einer continuirlichen arithmetischen Proportion, welche mit 4 Gliedern bezeichnet ist, die beiden mitlern Glieder gleich sind (§. 287), so folget, daß bei drei Gliedern (§. 285) die Summe der beiden äussern dem doppelten mitlern Glied gleich sein müsse.

Z. E. 2 . 4 . 6
4 . 2
8 . 8

Allgemein: $a \,.\, a + m \,.\, a + 2m$
$2a + 2m = 2a + 2m$

§. 290. Hieraus erhellet, daß man zu zwo Grössen allezeit die mitlere arithmetische Proportionalgrösse finde, wann die Helfte von der Summe der beiden Gliedern genommen werde.

Z. E. Es sei die erste Grösse 8 und die dritte 18, so ist die Summe 26, und also 13 die mitlere Proportionalgrösse.

Allgemein ist die Formel: $a \,.\, a + m \,.\, a + 2m$ (§. 285), und also das Aufsuchen der mitlern Proportionalgrösse nicht nöthig; zum Beweis aber, daß die Summe der beiden äussern Glieder halb genommen das mitlere Glied sei, kan die Formel dienen; dann a und $a + 2m$ addirt, thut $2a + 2m$, davon die Helfte ist: $a + m$.

§. 291. Wann bei einer discreten arithmetischen Proportion die Summe der beiden äussern Glieder gleich sein muß der Summe der beiden mitlern Glieder (§. 284), so folget hieraus, daß eine vierte Grösse dieser Proportion gefunden werde, wann von der Summe der beiden mitlern Grössen die erste Grösse subtrahirt wird.

Z. E. Die allgemeine Bezeichnung einer discreten arithmetischen Proportion ist nach §. 284 also:

$a \,.\, a + m = b \,.\, b + m$

für welche alle mögliche Zahlen angenommen werden können (§. 12), als z. E. a sei $= 12\frac{1}{2}$, die Differenz, nemlich $m = 4\frac{1}{8}$, und

und $b = 21$, so erhält man nach diesen Bestimmungen die Proportion, und somit die vierte Proportionalgrösse, welche also besonders gefunden wird:

$$\begin{array}{r} a + m = 16\tfrac{3}{8} \\ b = 21 \\ \hline 37\tfrac{3}{8} \\ -a = -\,12\tfrac{1}{4} \\ \hline 25\tfrac{1}{8} \end{array}$$

Die vierte Proportionalgrösse, wiewohl diese Procedur nicht nothig ist, indeme man nur die Bestimmung von b und m addiren darf.

§. 292. **Gehen die Glieder einer continuirlichen arithmetischen Proportion in der Ordnung des arithmetischen Verhältnisses (§. 268. 285) weiter fort, so heisset es alsdann eine arithmetische Progression.**

Z. E. Die continuirliche arithmetische Proportion §. 289 ist: 2 . 4 . 6, dabei nach der Regel §. 274 das Verhältnis 2 ist, indeme man hier fraget: wie sich 2 zu 4 verhalte? Werden nun die Glieder nach sothanem Verhältnis also fortgesezet: 2 . 4 . 6 . 8 . 10 u. s. f. so hat man eine arithmetische Progression.

Von

Von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen insbesondere.

§. 293.

Wie die Bezeichnung oder Aussezung der Glieder eines geometrischen Verhältnisses mit gemeinen Zahlen geschiehet, und alsdann das Verhältnis gesuchet wird, solches ist §. 274 gezeiget worden.

§. 294. Mit Buchstaben aber oder allgemein werden die Glieder eines geometrischen Verhältnisses bezeichnet, wann man beide Glieder a nennet, und dem, welches das gröste Glied sein soll, den Buchstaben n, Exponent genant (§. 273), multiplicando beifüget (§. 77), welche Formel alsdann, wie bekant, auf alle mögliche Zahlen angewandt werden kan.

Z. E. Es sei das geometrische Verhältnis: $an : a$.

Nimt man $a = 6$ und $n = 2\frac{1}{2}$, so ist das erste Glied $an = 15$, welches mit a, d. i. 6, bruchsweise dividirt wird: $\frac{15}{6} | \frac{5}{2}$, und anzeiget, daß sich 6 zu 15 verhalte, wie 2 zu 5, oder, wann es die kleinste Zahlen sein sollen, wie 1 zu $2\frac{1}{2}$; dann 2 kan in 5 $2\frac{1}{2}$ mahl genommen werden.

Oder:

Oder: Es sei das geometrische Verhältnis: $a : an$.

Nimt man, wie vorhin, $a = 6$ und $n = 2\frac{1}{2}$, so ist das zweite Glied $an = 15$, mit welchem das erste Glied a, d. i. 6, bruchsweise dividirt wird: $\frac{6}{15}|\frac{2}{5}$, welches anzeiget, daß sich 15 zu 6 verhalte, wie 5 zu 2 (§. 274).

§. 295. **Zu den Gliedern eines jeden geometrischen Verhältnisses können beliebige Zahlen addiret oder davon subtrahiret werden, ohne das Verhältnis zu verrüken, wann sie nur von eben dem Verhältnis sind, welches man erfähret, wann ein jedes Glied mit einer Zahl dividirt oder multiplicirt wird.**

Z. E. Bei den Gliedern des Verhältnisses: 12 : 4, kan jedes Glied mit 2, 3, 4 u. s. f. dividirt werden, dabei allemahl die Quotienten entweder addiret oder subtrahiret werden können, ohne das Verhältnis zu verrüken, als:

	Bei 12 : 4	ist das Verhältnis 3.
Jedes Glied durch 2 dividirt, und die Quotienten addirt, giebt:	6 : 2 ——— 18 : 6,	davon das Verhältnis wieder 3 ist.
Oder:	Bei 12 : 4	ist das Verhältnis 3.
Jedes Glied durch 2 divid. und die Quotienten subtrahirt, bleibt	— 6 : — 2 ——— 6 : 2,	davon das Verhältnis wieder 3 ist.
Oder:	Bei 12 : 4	ist das Verhältnis 3.
Jedes Glied mit 2 mult. giebt:	24 : 8 ——— 36 : 12,	davon das Verhältnis wieder 3 ist.

§. 296. **Sol dieses mit Buchstaben oder allgemein vorgestellet werden, so darf man nur zu der vorhin §. 294 gezeigten Formel einen beliebigen Theil von beiden Gliedern addiren oder subtrahiren, oder dieselbige auch multipliciren.**

Z. E. 2) $an : a$, durch 2 divid. (§. 104), und die Quotienten add. giebt: $\frac{1}{2}an : \frac{1}{2}a$

thut: $1\frac{1}{2}an : 1\frac{1}{2}a$

Item:

Item: von $\underline{an : a}$, die vorhin erhaltene Quotienten subtrah.

$$\begin{array}{l} an : a - \frac{1}{2}an - \frac{1}{2}a \text{ Reducirt} \\ \hline \frac{1}{2}an : \frac{1}{2}a \end{array}$$

Item: $an : a$, mit 2 multiplic. und die Producten addirt:

$$\begin{array}{l} 2an : 2a \\ \hline 3an : 3a \end{array}$$

§. 297. Hieraus folget, daß die Glieder nach Belieben dividirt und multiplicirt, auch die Quotienten und Producten wiederum addirt oder subtrahirt werden können, es mögen zum Verhältnis ganze oder gebrochene Zahlen kommen (§. 274).

§. 298. So erhellet auch aus der Sachen Beschaffenheit, daß von einem geometrischen Verhältnis das unbekante erste und zweite Glied, wann nur der Exponent bekant ist, gefunden werde, wann man im ersten Fall das bekante zweite Glied mit dem Exponenten multiplicirt, und im andern Fall mit dem Exponenten das erste Glied dividirt.

Z. E. Es sei das zweite Glied a und der Exponent n, so ist das erste Glied an.

Oder: Es sei das erste Glied an, so ist das zweite a.

§. 299. Sind zwei geometrische Verhältnisse einander gleich, d. i. haben dieselbige gleiche Exponenten, so nennet man solche ähnlich, und diese Aehnlichkeit eine geometrische Proportion (§. 275).

Z. E. Die Verhältnisse: 4 : 2 und 10 : 5 haben gleiche Exponenten, nemlich 2, darum machen diese beide Verhältnisse eine Proportion.

§. 300. Solchemnach enthält eine geometrische Proportion vier Glieder, oder Proportionalgrössen, welche

also beschaffen sein müssen, daß das Product der Aeussern dem Product der Mitlern gleich ist.

Z. E. 4 : 2 :: 10 . 5

Dann 4×5 ist $= 20$, und 2×10 ist $= 20$

Allgemein: $\frac{an : a :: bn : b}{anb = anb}$

Nach dieser Allgemeinheit mag man den Buchstaben Zahlen zueignen, wie man will, so bleibt immer eine Proportion.

Z. E. a sei $= 4\frac{1}{2}$, $n = 2$ und $b = 6$, so ist $an = 9$ und $bn = 12$, mithin die Proportion in gemeinen Zahlen:

$$\frac{9 : 4\frac{1}{2} :: 12 : 6}{54 = 54} \text{ Probe.}$$

Oder: a sei $= 1\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, und $b = \frac{3}{4}$, so ist $an = \frac{3}{8}$ und $bn = \frac{3}{16}$, mithin die Proportion in gemeinen Zahlen:

$$\frac{\frac{3}{8} : 1\frac{1}{2} :: \frac{3}{16} : \frac{3}{4}}{\frac{9}{32} = \frac{9}{32}} \text{ Probe.}$$

§. 301. Sonsten wird eine geometrische Proportion auch also bezeichnet:

$$a : b = c : d$$

welche bruchsweise also stehet (s. §. 274. 294):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Werden diese Brüche oder Verhältnisse gleich gegrössert (§. 128), so erhält man: $ad = bc$, als wornach ad, als das Product der Aeussern, und bc, als das Product der mitlern Glieder, einander gleich sind; dann wann z. E. $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$ und $d = 12$ genommen werden, so ist ein jedes Product 48.

§. 302. Aus dieser Eigenschaft einer geometrischen Proportion, da das Product der äussern dem Product der mitlern Glieder gleich sein muß, erkennet man, daß die Glieder hauptsächlich auf viererlei Art versezet werden können, ohne die Proportion zu verrüken.

Z. E. Die Glieder der Proportion seien nach lezterer Art $a : b = c : d$, so werden solche also versezet:

$$a : c = b : d$$
$$b : a = d : c$$
$$d : c = b : a$$
$$d : b = c : a$$

Nota. Wollen Anfängere hievon die Probe machen, so dürffen sie nur für die Buchstaben eine beliebige Proportion in gemeinen Zahlen bestimmen, und dieselbige auf solche Weise versezen: als da kan z. E. $a = 4$, $b = 8$, $c = 6$ und $d = 12$ genommen werden; dann bei dieser Buchstabeproportion können die Buchstaben nicht, wie bei der vorhergehenden Formel: $an . a = bn . b$ geschehen, ganz willkührlich, sondern sie müssen also genommen werden, daß solche eine Proportion machen (§.299 u.f.), gleichwie in Ansehung der Einschränkung der Allgemeinheit auch bei den quadratischen Gleichungen angemerket wird (§. 562); die Allgemeinheit gegenwärtiger Formeln: $a : c = b : d$ aber, kan bei den Gleichungen §. 541 nachgesehen werden.

§. 303. Sol aus drei Zahlen die vierte geometrische Proportionalzahl (§. 275) gesuchet werden, so ist die gemeine Art nach der Regel de Tri die faßlichste und auch bequemste, vermöge welcher, wann das Product der zweiten und dritten Zahl mit der ersten Zahl dividirt wird, der Quotient die verlangte vierte Proportionalzahl anzeiget.

Z. E. Da die erste Grösse grösser ist, als die Zweite (§.294).

$$an . a . bn$$

$an) \, abn \, | \, b$ ist die vierte Proportionalzahl,

mithin die Proportion: $an : a = bn : b$

und die Probe (§.300): $anb = anb$

Oder: Da die erste Grösse kleiner ist, als die Zweite (§. 294).

$$\frac{a \cdot an \cdot b}{a)\,anb\,|\,bn}$$ ist die vierte Proportionalzahl, mithin die Proportion: $a : an = b : bn$

und die Probe (§. 300): $abn = abn$

Oder: Da man die Säze nur nach gemeiner Art formiret und behandelt, wie solches inskünftige bei den Gleichungen geschehen wird.

Z. E. $a - bc - d$

$$\frac{\frac{bcd}{}}{a}$$

Item: $\frac{a}{b} - a - \frac{b}{c}$

$$\frac{}{ac} \quad \frac{\frac{bba}{}}{ca}$$ reducirt: $\frac{b^2}{c}$ (§. 135).

§. 304. Wie aus beliebig angenommenen Producten des ersten und vierten, und zweiten und dritten Gliedes (§. 300) vier Glieder: sodann aus beliebigen Summen des ersten und vierten und zweiten und dritten Gliedes und einem Exponenten abermahl vier Glieder einer geometrischen Proportion gefunden werden, solches wird bei den Gleichungen vorkommen (§. 541. 542).

§. 305. **Ist bei einer geometrischen Proportion das zweite Glied dem Dritten gleich, so hat man alsdann in sothaner Proportion nur drei Glieder, welche keiner Regel de Trirechnung bedürffen, und die also beschaffen sein müssen, daß sich die Zweite zu der Ersten verhalte, als wie sich die Dritte zur Zweiten verhält.**

Z. E. 4 : 6 = 6 : 9 mit 3 Gliedern: 4 : 6 : 9.
Denn 6 verhält sich zu 4, wie 9 zu 6, nemlich, wie 3 zu 2 (§. 274).

Allgemein mit 4 Gliedern: $a : an = an \cdot an^2$

Probe (§. 300): $a^2 n^2 = a^2 n^2$

Die Bezeichnung mit 3 Gliedern ist:

$a \cdot an \cdot an^2$

§. 306.

§. 306. Diese und jene geometrische Proportion (§. 300) werden eben so, als wie die arithmetische Proportionen (§. 284. 285), voneinander unterschieden, indeme man jene eine **discrete**, diese aber eine **continuirliche** geometrische Proportion nennet (§. 286).

§. 307. Da bei einer **discreten** geometrischen **Proportion** die Producten der äussern und mitlern Glieder gleich sein müssen (§. 300), so folget, daß bei gegenwärtiger **continuirlichen Proportion das Product der äussern Glieder dem Quadrat der mitlern Grösse gleich sein muß.**

Z. E. Die Glieder seien:

$$\frac{4\,.\,6\,.\,9}{36\,.\,6\times6=36}$$

Allgemein: $\dfrac{a\,.\,an\,.\,an^2}{a^2 n^2 = a^2 n^2}$

§. 308. **Wil man zwischen zweien Grössen die mitlere geometrische Proportionalgrösse suchen, gleichwie §. 290 die mitlere arithmetische Proportionalgrösse,** so erhellet aus dem Vorhergehenden, daß die Quadratwurzel aus dem Product der beiden äussern Grössen die mitlere Proportionalgrösse sein müsse.

Z. E. $\dfrac{a\,.\,an^2}{a^2 n^2}$ Beide äussere Grössen. / Product.

$an)\,a^2 n^2\,|\,an$ Die Quadratwurzel (§. 178), und also die mitlere Grösse.

Nota. Wie zwischen zwo Zahlen so viele geometrische Zwischenproportionalzahlen gefunden werden, als man wil, solches wird bei der geometrischen Progression gezeiget werden.

§. 309. **Gehen die Glieder einer continuirlichen geometrischen Proportion in der Ordnung eines geometrischen Verhältnisses (§. 274. 305) weiter fort, so heisset es alsdann eine geometrische Progression.**

Z. E. Die continuirliche geometrische Proportion §. 307 ist: 4 . 6 . 9, dabei nach der Regel §. 274 das Verhältnis $\frac{3}{2}$, d. i. $1\frac{1}{2}$ ist, indeme man hier fraget: wie sich 4 zu 6 verhalte? Werden nun die Glieder nach sothanem Verhältnis also fortgesezet: 4 . 6 . 9 . $13\frac{1}{2}$ u. s. f. so hat man eine geometrische Progression, dabei wegen des gebrochenen Exponenten §. 334 eine Regel gegeben wird.

§. 310. **Man hat auch noch eine sogenante harmonische Proportion, davon aber das Nöthige erst bei den Gleichungen gezeiget werden kan (§. 543).**

Von

Von den

Progressionen.

§. 311.

Eine Progression nennet man diejenige Reihe Zahlen, welche in einer gewissen Vergleichung zu- oder abnehmen, und wird in die arithmetische, geometrische und harmonische Progression abgetheilet.

Derowegen folget:

I. Von der arithmetischen Progression.

§. 312. Eine arithmetische Progression ist, wann eine Reihe Zahlen nach einem arithmetischen Verhältnis §. 292 zu- oder abnehmen, welche Zahlen Glieder der Progression heissen.

Z. E. 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 u. s. f. oder 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 stehen in einer arithmetischen Progression, dabei die Differenz 1 ist (§. 273).

Item: 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 u. s. f. davon die Differenz 3 ist.

Mit Buchstaben ist die Bezeichnung, wann das erste und ein jedes der folgenden Glieder a und die Differenz m genennet wird, also: a. $a + m$. $a + 2m$. $a + 3m$. $a + 4m$. $a + 5m$ u. s. f. Wird nun z. E. $a = 2$ und $m = 3$ genommen, so bedeuten diese Formeln: 2, 2 und 3, 2 und 6, 2 und 9 u. s. f. d. i. m wird bei einem jeden Glied einmahl mehr genommen und a addirt, oder, welches einerlei, jenes zu a addirt.

§. 313. Hierbei siehet man, daß das lezte Glied einer arithmetischen Progression das erste Glied enthalte, und die Differenz so vielmahl, als Glieder der Progression weniger 1 vorhanden sind.

Z. E. $a + 5m$ zeiget an, daß die Differenz fünfmahl genommen worden, mithin sothane Progression sechs Glieder enthalte.

Die allgemeine Formel des lezten Gliedes aber ist: $a + (n - 1)m$, d. i. a, und die Anzahl der Glieder weniger 1 mit m multiplicirt (§. 85).

§. 314. Es kommen daher bei einer jeden arithmetischen Progression vier Stüke oder Zahlen vor, auf welche man zu merken hat, als: das erste und lezte Glied, die Differenz, und die Anzahl der Glieder, von welchen jedesmahlen ein Glied gefunden werden kan, wann die übrigen 3 bekant sind.

§. 315. Diese vier Stüke bezeichnet man also: das erste Glied mit a, das Lezte mit z, die Differenz mit m, und die Anzahl der Glieder mit n.

Nota. Das lezte Glied ist bei einer arithmetischen Progression, gedachtermassen, $a + (n - 1)m$ (§. 313), man wird sich aber, wo solche allgemeine Formel nicht nöthig ist, wegen der vielen Buchstaben derselben, nur des Buchstabens z bedienen.

§. 316. Ist das erste Glied, die Differenz und die Anzahl der Glieder bekant, das ist: werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird das lezte Glied, d. i. die Zahl desselben, gefunden, wann mit der Differenz die Anzahl der Glieder, weniger Eins, multiplicirt und das erste Glied addiret wird (§. 313), als:

Allgemeine Auflösung: $a + (n - 1)m = z$, das heist: $n - 1$, als die Anzahl der Glieder weniger 1, mit m, als der Differenz, multiplicirt, und a, als das erste Glied, zum Product addirt, ist $= z$, d. i. die Zahl des lezten Glieds.

Oder nach §. 85 also: $(n - 1) \times (m) + a = z$, welches der Sache gemässer ist.

Wil

Wil man nun diese Allgemeinheit auf gemeine Zahlen bestimmen, so kan es nach Belieben, oder wie es der Vorfall erfordert, geschehen, als z. E.

Es sei $a = 4$, $m = 2$ und $n = 8$,
so ist die Resolution: $n = 8$ Die Anzahl der Glieder.

$$\begin{array}{rl} n = 8 & \text{Die Anzahl der Glieder.} \\ -1 & \\ \hline 7 & \text{Die Anzahl der Glieder weniger 1.} \\ m = 2 & \text{Die Differenz.} \\ \hline 14 & \\ +a = 4 & \text{Das erste Glied.} \\ \hline 18 & \text{Ist das lezte Glied nach dieser Bestimmung.} \end{array}$$

Probe: 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18.

Nota. Hierbei ist zu merken, daß zur Anzahl der Glieder, als n, allezeit eine ganze Zahl genommen werden müsse, weil sonst keine Auflösung statt findet, das erste und lezte Glied aber und die Differenz können gebrochene Zahlen sein.

Z. E. Es sei $a = \frac{1}{2}$, $m = 2\frac{1}{2}$ und $n = 6$,
so ist die Resolution:

$$\begin{array}{rl} n = 6 & \\ -1 & \\ \hline 5 & \\ m = 2\frac{1}{2} & \\ \hline 12\frac{1}{2} & \\ +a = \frac{1}{2} & \\ \hline 13 & \text{Ist die Zahl des lezten Gliedes nach dieser Bestimmung.} \end{array}$$

Probe: $\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 3 + 2\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 8 + 2\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 13$

Einem Münzmeister wurde aufgetragen, fünferlei Münzen also auszuprägen, daß von der grösten Münze an, bis zur kleinsten zu 40 Kreuzer, eine jede 5 Kreuzer geringer am Wehrt sein solte: Fr. Wie viel Kreuzer hat die Gröste wehrt sein müssen? Antw. 1 fl.

Allgemeine Auflösung: $(n - 1) \times (m) + a = z.$

Resolution:

$$\begin{array}{r} n = 5 \\ -1 \\ \hline 4 \\ m = 5 \\ \hline 20 \\ +a = 40 \\ \hline 60 \end{array}$$ Kreuzer.

Probe: 60. 55. 50. 45. 40.

§. 317. Ist das erste und lezte Glied und die Anzahl der Glieder bekant, das ist: werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird die Differenz gefunden, wann das erste vom lezten Glied subtrahirt und der Rest durch die Anzahl der Glieder weniger Eins dividiret wird, als:

Allgemeine Auflösung: $\frac{z - a}{n - 1} = m$ Das heist: $z - a$ mit $n - 1$ divid. ist gleich m, d. i. der Differenz.

Resolution: Es sei z. E. $z = 20$

$$\begin{array}{r} -a = -4 \\ \hline n = 9 - 1 = 8)\ 16 \\ \hline 2 \end{array}$$ Die Differenz.

Probe: 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

Oder: Es sei $z = 18$

$$\begin{array}{r} -a = -3 \\ \hline n = 6 - 1 = 5)\ 15 \\ \hline 3 \end{array}$$ Die Differenz.

Probe: 3. 6. 9. 12. 15. 18.

Als ein Rechenmeister aus Versuch gefragt wurde: was der Unterschied der Preisen von zehn Ehlen wäre, da von der Gering-

Geringsten an bis zur Zehnten immer eine Ehle gleichviel Bazen mehr gelte? antwortete er:

Wann man von dem Preis der zehnten Ehle, sol sein $= z$, den Preis der ersten Ehle, sol sein $= a$, subtrahirt, und den Rest durch die Anzahl der Glieder, weniger Eins, sol sein $= n - 1$, dividirt, so komt die Antwort der Frage, und zugleich alle andere mögliche Antworten derer desfals möglichen Fragen.

Gesezt, es wäre $z = 40$ Bazen.

$$\begin{array}{rl} & -a = -4 \\ \hline n = 10 - 1 = & 9)\ 36 \\ \hline & 4 \end{array}$$

4 Bz. Der Unterschied, nach denen von z, a, n angenommenen willkührlichen Wehrten.

Probe:

4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 . 36 . 40.

§. 318. Ist das erste und lezte Glied, wie auch die Differenz, bekant, das ist: werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird die Anzahl der Glieder gefunden, wann der Unterschied zwischen dem ersten und lezten Glied durch die Differenz dividirt und zum Quotienten 1 addiret wird, als:

Allgemeine Auflösung: $\frac{z - a}{m} + 1 = n$, das heist: das lezte Glied weniger das Erste mit dem Unterschied dividirt und zum Quotienten 1 addirt, ist gleich n, d. i. der Anzahl der Glieder.

Resolution:

Es sei z. E. $z = 18$

$$\begin{array}{rl} & -a = -4 \\ \hline m = & 2)\ 14 \\ \hline & 7 \\ & +1 \\ \hline & 8 \end{array}$$

8 Glieder nach gegenwärtigen Bestimmungen.

Probe:

4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18.

Eine Linie wurde in verschiedene Theile getheilet, also, daß der erste Theil $\frac{1}{2}$ Schuh und ein jeder der folgenden Theilen immer $\frac{1}{2}$ Schuh länger wäre, mithin der lezte Theil 6 Schuh hielte: Fr. Wie viel Theile waren es? Antw. 12.

Allgemeine Auflösung: $\frac{z-a}{m}+1=n$

Resolution: $z=6$

$-a=-\frac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2})\ 5\frac{1}{2}$

11 Dann $5\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$ dividirt, giebt 11

$+1$

12 Theile.

Probe:

$\frac{1}{2}$. 1. $1\frac{1}{2}$. 2. $2\frac{1}{2}$. 3. $3\frac{1}{2}$. 4. $4\frac{1}{2}$. 5. $5\frac{1}{2}$. 6.

§. 319. Ist die Anzahl der Glieder, die Differenz und das lezte Glied bekant, das ist: werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so findet man das erste Glied, wann die Anzahl der Glieder weniger Eins mit der Differenz multipliciret und das Product vom lezten Glied subtrahirt wird, als:

Allgemeine Auflösung: $z-(n-1)m=a$, das heist: das lezte Glied, weniger die Anzahl der Glieder weniger Eins, mit der Differenz multiplicirt, ist gleich a, d. i. dem ersten Glied.

Resolution: Es sei $z=18$, sodann $n=8$

-14 $\quad$ -1

Das erste Glied 4 $\quad$ 7

$m=2$

14 von z subtrahirt.

Probe:

4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18.

Eine Summe Geld wurde in 8 Wochen, und in jeder Woche immer 3 fl. mehr, mithin zulezt 26 fl. bezahlet:

Fr.

Fr. Mit wie viel Gulden ist der Anfang gemacht worden? Antw. Mit 5 fl.

Allgemeine Auflösung: $z - (n-1)m = a$

Resolution: $z = 26$, sodann $n = 8$
-21 $\quad -1$
Der Anfang war mit 5 fl. $\quad 7$
$m = 3$
21 von z subtrahirt.

Probe:

5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26.

§. 320. Ist, wie §. 317, das erste und lezte Glied und die Anzahl der Glieder bekant, das ist: werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird die Summe der Progression gefunden, wann das erste und lezte Glied addirt und die erhaltene Summe mit der Helftezahl der Glieder multiplicirt wird, als:

Allgemeine Auflösung: $(a + z)\frac{1}{2}n = s$

Resolution: Es sei $a = 3$
$z = 18$
$\frac{1}{2}n = 3 \cdot 21$; dann die Anzahl der Glieder sol 6 sein.
3
63 ist die Summe.

Oder: Es sei $a = 3$
$z = 21$
$\frac{1}{2}n = 3\frac{1}{2} \cdot 24$; dann die Zahl der Glieder sol 7 sein.
$3\frac{1}{2}$
72
12
84 ist die Summe.

Nota. Der Grund von dieser Summirung ist, daß bei einer arithmetischen Progression immer zwei einander entgegen stehende Glieder gleiche Summe machen, mithin es einerlei wäre, ob man sagte: die

Summe

Summe des ersten und lezten, oder des zweiten und vorlezten Gliedes u.s.w. solte mit der Helftezahl der Glieder multiplicirt werden.

Z. E. Die vorhergehende Progression ist:

3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18

21

21

21

dann 3mahl 21 giebt die Summe 63

und die nächstvorhergehende Progression:

3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21

12

24

24

24

Da hier die halbe Zahl der Glieder $3\frac{1}{2}$ ist, so heisset es: $3\frac{1}{2}$mahl 24 giebt die Summe 84.

§. 321. Solchemnach kan man sich eine allgemeine Formel machen, wodurch die Summe einer jeden arithmetischen Progression ausgedrüket wird.

Dann das erste Glied ist a (§. 315).
Die Formel des lezten Gliedes $a + (n - 1)\,m$ (§. 313); daň hier ist
Summe: $2a + (n - 1)\,m$ solche Formel nöthig (s. §. 315 Not.).

Diese Summe mit $\frac{1}{2}n$ multiplicirt (§. 320), so hat man die allgemeine Formel:

$$2a + (n - 1)\,m)\,\tfrac{1}{2}n = s$$

welche heisset: Zu $2a$ wird addirt das Product von $n - 1$ und m, und die Summe mit $\frac{1}{2}n$ multiplicirt, so ist das Product gleich der Summe von der Progression.

Z. E. Einer sol in 6 Terminen eine gewisse Summe Gulden bezahlen, den Anfang mit 13 fl. machen, und jeden Termin 6 fl. mehr geben: Fr. Wie groß ist die Summe?

$2a$, d. i. 26 . . . . 26 Darzu
wird addirt: $(n-1)m$, d. i. 5 mit 6 multipl. 30

56

alsdann mit $\frac{1}{2}n$, d. i. 3 multiplicirt . . 3

168 fl. ist die Suṁe.

Nota I. Nach dieser allgemeinen Formel müssen also bekant sein oder bestimt werden, das erste Glied, die Anzahl der Glieder und die Differenz derselben, mithin muß in Ermangelung deren eines, dasselbe nach dem Vorhergehenden erst gesucht werden, als:

a) Da die drei erforderliche Stüke zur Summirung (§. 320) gegeben worden oder vorhanden sind.

Z. E. Es wurden 5 Staab Tuch also gekauft, daß für den Ersten $4\frac{1}{5}$ fl. und für immer einen der Folgenden $1\frac{1}{5}$ fl. mehr bezahlt werden solte: Fr. Wie viel hat das Tuch betragen?

$2a$ sind . . . . $8\frac{2}{5}$ fl. Hierzu
wird addirt $(n-1)m$, d. i. $5-1 \times 1\frac{1}{5} = 4\frac{4}{5}$

$13\frac{1}{5}$ Dieses
mit $\frac{1}{2}n$, d. i. $2\frac{1}{2}$ multiplicirt . . . . . $2\frac{1}{2}$

33 fl.

Probe:

$4\frac{1}{5} + 5\frac{2}{5} + 6\frac{3}{5} + 7\frac{4}{5} + 9 = 33$

b) Da die Differenz unbekant ist, und nach §. 317 erst gesucht werden muß.

Z. E. Eine Summe Geldes an Gulden wurde in 9 Personen also getheilet, daß der gröste Theil $12\frac{1}{4}$ fl. und der kleinste $2\frac{1}{4}$ fl. und die übrige Theile nach dem arithmetischen Verhältnis waren: Fr. Wie gros war die Summe?

Die

Die allgemeine Bezeichnung der Differenz ist §. 317:

$$\frac{z-a}{n-1}=n$$

Resolution: $z-a$ ist $12\frac{1}{4}-2\frac{1}{4}$, d. i. 10
$n-1$ ist $9-1$, d. i. 8)
$1\frac{1}{4}$ ist die Differenz.

Nun sage nach der allgemeinen Formel der Summe $2a+(n-1)m)\frac{1}{2}n$:

2 a sind . . . . $4\frac{1}{2}$ Hierzu
wird addirt $(n-1)m$), d. i. $9-1\times1\frac{1}{4}$ 10
$14\frac{1}{2}$ Dieses
mit $\frac{1}{2}n$, d. i. $4\frac{1}{2}$ multiplicirt . . . $4\frac{1}{2}$
$65\frac{1}{4}$ fl. war die Sum̃e.

Probe:

$$2\frac{1}{4}+3\frac{2}{4}+4\frac{3}{4}+6+7\frac{1}{4}+8\frac{2}{4}+9\frac{3}{4}+11+12\frac{1}{4}=65\frac{1}{4}$$

Bei dieser Vorgabe hätte man die Summe nach §. 320 sogleich finden können, da die allgemeine Bezeichnung der Summe nach denen bekanten Stüken ist:

$(a+z)\frac{1}{2}n$

Resolution: $a=2\frac{1}{4}$
$z=12\frac{1}{4}$
$14\frac{1}{2}$
mit $\frac{1}{2}n$ multiplicirt . . $4\frac{1}{2}$
58
$7\frac{1}{4}$
$65\frac{1}{4}$ fl. die Summe.

c) Da die Anzahl der Glieder unbekant, und nach §. 318 erst gesucht werden muß.

Z. E. Ein Weinhändler versandte unterschiedene Faß Wein, davon das Erste $\frac{1}{2}$ Ohm, das Zweite $\frac{1}{4}$ Ohm mehr, das Dritte abermahl $\frac{1}{4}$ Ohm mehr, als das Vorhergehende, und so fort, daß also das Lezte $3\frac{1}{4}$ Ohm hielte: Fr. Wie viel war des Weins?

Die

Die allgemeine Bezeichnung der Anzahl der Glieder ist:

$$\frac{z - a}{m} + 1 = n$$

Resolution:

$z - a$ ist $3\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$, d. i. $2\frac{3}{4}$
m ist $\frac{1}{4}$, damit dividirt, giebt 11
+ 1
12 Faß.

Nun sage nach der allgemeinen Formel der Summe $2a + (n - 1)m)\frac{1}{2}n$:

2a sind . . . . 1 Hierzu
wird addirt: $(n - 1)m$, d. i. $12 - 1 \times \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$

$3\frac{3}{4}$
mit $\frac{1}{2}n$, d. i. 6 multiplicirt 6

$22\frac{1}{2}$ Ohm.

Probe:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4} + 1 + 1\tfrac{1}{4} + 1\tfrac{2}{4} + 1\tfrac{3}{4} + 2 + 2\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{2}{4} + 2\tfrac{3}{4} + 3 + 3\tfrac{1}{4} = 22\tfrac{1}{2}$$

d) Da das erste Glied unbekant, und nach §. 319 erst gesuchet werden muß.

Z. E. Einer kaufte ein Kleid, und zahlte sogleich 7 Thlr. 60 kr. mit Versprechen, den Rest in drei Terminen also zu bezahlen, daß er den Erstfolgenden 1 Thlr. 40 kr. weniger, den Zweitfolgenden wieder 1 Thlr. 40 kr. weniger, als an dem Vorhergehenden, und endlich auf solche Weise auch den lezten Termin bezahlen wolte. Fr. Wie theuer war das Kleid?

NB. Die kleinere Sorten müssen zu Theilen der Grössern reducirt werden.

Die allgemeine Bezeichnung des ersten Gliedes ist:

$z - (n - 1)m = a$

Resolution:

z ist $7\frac{2}{3}$ Thlr. davon wird subtrahirt 4 — 1, das
$-4\frac{1}{3}$ ist 3, mit $1\frac{4}{9}$ multiplicirt, giebt: $4\frac{1}{3}$

$3\frac{1}{3}$ ist das erste Glied.

Nun sage nach der allgemeinen Formel der Summe $2a(n-1)m)\frac{1}{2}n$:

$2a$ ist	$6\frac{2}{3}$	Hierzu wird
addirt $(n-1)m$, d. i. $3 \times 1\frac{4}{9}$ . .	$4\frac{1}{3}$	
	11	
mit $\frac{1}{2}n$, d. i. 2 multiplicirt . . .	2	
	22 Thlr. kostete das Kleid.	

Probe: $3\frac{1}{3} + 4\frac{7}{9} + 6\frac{2}{9} + 7\frac{2}{3} = 22$

Nota II. Es könten zwar die Antworten auf vorhergehende Exempeln auch ohne die gegebene Regeln gefunden werden; alleine bei grössern Zahlen und Reihen würde es alsdann eben so beschwerlich sein, als wann man eine Zahl, anstatt z. E. mit 4321 regelmässig zu multipliciren, so viel mahl untereinander sezen und die Posten addiren, oder im Divisionsfall den Theiler so oft es thunlich subtrahiren wolte.

Z. E. Es würde gefragt, wie groß die Summe in Ansehung der sämtlichen Glokenschläge von 1 bis 12 sei, wann für den ersten Glokenschlag 1 ß, für den Zweiten $2\frac{1}{4}$ ß mehr, u. s. f. immer für den Folgenden $2\frac{1}{4}$ ß mehr, als für den Vorhergehenden gerechnet würde?

Die allgemeine Bezeichnung der sämtlichen Glokenschläge ist nach §. 320:

$(a + z)\frac{1}{2}n = s.$

Resolution: a, das erste Glied ist . . .	1
z die Zahl des lezten Glieds	12
	13
Mit $\frac{1}{2}n$, d. i. die Helfte der Glieder multipl.	6
	78 Glokenschläge.

Weil

Weil nun die sämtliche Glokenschläge, nemlich 78, als die Glieder der Progression bekant sind, so wird die Zahl des lezten Gliedes, vermög des ersten Gliedes 1, und des Verhältnisses $2\frac{1}{4}$, nach §. 316 gewöhnlich gefunden.

Allgemeine Bezeichnung der Zahl des lezten Gliedes:

$$(n - 1) \times (m) + a = z$$

Resolution:

$n - 1$, d. i. 78 — 1, mithin 77
Mit m, d. i. $2\frac{1}{4}$ multiplicirt . . $2\frac{1}{4}$
$173\frac{1}{4}$
a, d. i. 1, wird addirt . . 1
$174\frac{1}{4}$ Zahl des lezten Gliedes.

Die Summe der Progression, oder die Zahl der begehrten Gulden, wird nun nach §. 320. nach allgemeiner Art also ausgedrükt:

$$(a + z)\tfrac{1}{2}n = S.$$

Resolution:

a ist 1 Hierzu wird addirt
z : $174\frac{1}{4}$
$175\frac{1}{4}$ Dieses mit $\frac{1}{2}n$, d. i. halb 78, multiplicirt
39
$6834\frac{3}{4}$ fl ist die verlangte Summe.

Oder nach §. 321 also:

$$2a + (n - 1)\,m)\tfrac{1}{2}n = S.$$

Resolution:

$2a$ ist 2. $n - 1$ ist 78 — 1, also 77, diese
$173\frac{1}{4}$ mit m, d. i. $2\frac{1}{4}$ mult. $2\frac{1}{4}$
$175\frac{1}{4}$ $173\frac{1}{4}$, diese zu
Mit $\frac{1}{2}n$, d. i. halb 78 mult. 39 $2a$ addirt.
$6834\frac{3}{4}$ fl ist die verlangte Summe.

Nota III. Es kan sich also unter den drei gegebenen Zahlen eine Unbekante befinden, sie muß aber also beschaffen sein, daß sie durch Rechnen erst bestimt werden kan, wie z. E. vorhin mit den sämtlichen Stundenschlägen geschehen, welche die Zahl der Glieder sein solten.

Nota IV. Wann §. 320 die Formel eine Summe einer arithmetischen Progression ausdrüket, so betrift es nur die Summe des ersten und lezten Gliedes und die halbe Anzahl der Glieder; die Formel §. 321 aber enthält auch den Exponenten, folglich kan man nach derselben alle nur beliebige Vorgaben machen, man mag positive oder negative Zahlen erwählen, nur daß die Anzahl der Glieder positiv sei.

Z. E. Es sei $a = -16\frac{1}{4}$, $n = 5$ und $m = 12\frac{1}{2}$, so sind $2a = -32\frac{1}{2}$, sodann $n - 1$, d. i. 4 mit m, d. i. $12\frac{1}{2}$,

50 multiplicirt, giebt 50, welche

$17\frac{1}{2}$ zu $2a$ addirt werden.

mit $2\frac{1}{2}$, d. i. $\frac{1}{2}n$ multiplicirt,

giebt: $43\frac{3}{4}$ als die Summe.

Hierüber können nun die Fragen nach dem lezten Glied (§.316), nach der Differenz (§.317), nach der Anzahl der Glieder (§.318), nach dem ersten Glied (§. 319), oder nach der Summe (§. 320), aufgeworffen, und z. E. folgende Vorgaben gemacht werden:

Wann A $16\frac{1}{4}$ fl weniger als nichts, das ist $-16\frac{1}{4}$ fl, B $12\frac{1}{2}$ fl mehr, C wieder $12\frac{1}{2}$ fl mehr als B, D abermahl $12\frac{1}{2}$ fl mehr als C, und endlich E $12\frac{1}{2}$ fl mehr als D im Vermögen hätte, wie viel hätte also E?

Hier wird nach der Zahl des lezten Gliedes gefragt, wovon die Formel §. 316 also ist:

$$(n - 1) \times (m) + a = z$$

Resolution:

$n - 1$ ist $5 - 1$, d. i. 4, mit m, d. i. $12\frac{1}{2}$ multiplicirt, bringt 50, hierzu a, d. i. $-16\frac{1}{4}$ gethan.

$-16\frac{1}{4}$

$33\frac{3}{4}$ fl hatte E.

Probe:

A		B		C		D		E
$-16\frac{1}{4}$	$+12\frac{1}{2}=$	$-3\frac{3}{4}$	$+12\frac{1}{2}=$	$8\frac{3}{4}$	$+12\frac{1}{2}=$	$21\frac{1}{4}$	$+12\frac{1}{2}=$	$33\frac{3}{4}$

Denn wann A $16\frac{1}{4}$ fl weniger als nichts hat, so muß B natürlicher Weise um $12\frac{1}{2}$ fl reicher sein, da er nur $3\frac{3}{4}$ fl weniger als nichts hat: hat aber B $3\frac{3}{4}$ fl weniger als nichts, so ist ganz begreiflich, daß C um $12\frac{1}{2}$ fl reicher sein müsse, wann er $8\frac{3}{4}$ fl baar Geld habe, u. s. f.

Item:

Item: Wann A $16\frac{1}{4}$ weniger als nichts hätte, d.i. — $16\frac{1}{4}$ fl, E $33\frac{3}{4}$ fl, und der Personen fünf wären, davon B etliche Gulden mehr als A, C ebenfals so viel Gulden mehr als B, u. s. f. immer der Folgende gleichviel Gulden mehr als der Vorhergehende im Vermögen hätte, so ist die Frage, wie viel immer der Folgende mehr als der Vorhergehende Gulden im Vermögen habe?

Hier wird nach der Differenz gefragt, wovon die Formel §. 317 also ist:

$$\frac{z - a}{n - 1} = m$$

Resolution: $z = 33\frac{3}{4}$
$-a = +16\frac{1}{4}$ denn hier wird unter + subtrah. (§. 72).
$4)\,50$ diese mit $n - 1$, d. i. 4, dividirt.
$12\frac{1}{2}$ fl hatte allezeit der Folgende mehr, als der Vorhergehende.

Die Probe ist, wie die Vorhergehende.

Item: Wann A $16\frac{1}{4}$ fl weniger als nichts, d. i. — $16\frac{1}{4}$ fl, B $12\frac{1}{2}$ fl, u. s. f. immer der Folgende $12\frac{1}{2}$ fl mehr als der Vorhergehende, und also der Lezte $33\frac{3}{4}$ fl im Vermögen hätte, wie viel Personen wären solches?

Die Frage ist hier nach den Gliedern der Progression, davon die Formel §. 318 also ist:

$$\frac{z - a}{m} + 1 = n$$

Resolution: $z = 33\frac{3}{4}$
$-a = +16\frac{1}{4}$ hier wird, wie vorhin, unter + subtrahirt (§. 72).
$12\frac{1}{2})\,50$ mit m, d. i. $12\frac{1}{2}$, dividirt.
4
+ 1
5 sind der Personen oder Glieder der Progression.

Die Probe ist abermahl, wie die Vorhergehende.

Item: Von fünf Personen ist B um $12\frac{1}{2}$ fl reicher als A, C abermahl um $12\frac{1}{2}$ reicher als B, u. s. f. immer der Folgende um $12\frac{1}{2}$ fl reicher als der Vorhergehende, folglichen ist des E Vermögen $33\frac{3}{4}$ fl. Fr. Was hat A im Vermögen?

Hier ist die Frage nach dem ersten Glied, wovon die Formel §. 319 also ist:

$$z - (n - 1) m = a$$

Resolution:

$z = 33\frac{3}{4}$, $n - 1$, d. i. 4 mit m, d. i. $12\frac{1}{2}$ multiplicirt

-50 giebt 50, diese von $33\frac{3}{4}$ subtrahirt.

$-16\frac{1}{4}$ fl ist A sein Vermögen, d. i. er hat $16\frac{1}{4}$ fl weniger als nichts.

Die Probe wird wie vorhin gemacht.

Item: Von fünf Personen hat A $16\frac{1}{4}$ fl weniger als nichts, nemlich $-16\frac{1}{4}$ fl, und E $33\frac{3}{4}$ fl. Fr. Wie viel ist ihr sämtliches Vermögen?

Hier wird nach der Summe der Progression gefragt, welche nach §. 320 also ausgedrükt wird:

$$(a + z)\tfrac{1}{2}n = s.$$

Resolution:

$a = -16\frac{1}{4}$

$z = 33\frac{3}{4}$

$17\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}n$, d. i. $2\frac{1}{2}$ multiplicirt.

$2\frac{1}{2}$

$43\frac{3}{4}$ ist das sämtliche Vermögen.

Probe:

Nach obiger Probe sind die negative Glieder:

A $-16\frac{1}{4}$

B $-3\frac{3}{4}$

Summe: -20

Die positive Glieder: C $8\frac{3}{4}$

D $21\frac{1}{4}$

E $33\frac{3}{4}$

Summe: $63\frac{3}{4}$ Hiervon jene Summe 20 subtrahirt

-20

$43\frac{3}{4}$ fl ist das sämtl. wahre Vermögen.

Nota

Nota V. Da hier -20 weggethan werden musten, so hätte man leicht auf einen Irthum gerathen, und sothane -20 als einen negativen Subtractoren ansehen können (§. 72); alleine es ist dieses nicht sowohl eine Subtraction, als vielmehr eine Reduction (§. 60) derer Gliedern solcher Progression, also:

$$\underline{-16\tfrac{1}{4}-3\tfrac{3}{4}}+\underline{8\tfrac{3}{4}}+\underline{21\tfrac{1}{4}+33\tfrac{3}{4}},$$ welche reducirt $43\frac{3}{4}$ machen.

Nota VI. Befindet sich unter drei bekanten Zahlen (§. 314) die Summe der Progression, so kan die Auflösung erst bei den quadratischen Gleichungen gezeiget werden (§. 576).

II. Von der geometrischen Progression.

§. 322. Eine geometrische Progression ist, wann eine Reihe Zahlen nach einem geometrischen Verhältnis (§. 309) zu- oder abnimt, welche Zahlen Glieder der Progression genennet werden.

Z. E. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 u. s. f.

Dann wie sich z. E. 8 zu 4 verhält, so verhält sich auch 4 zu 2 und 2 zu 1, und 1 ist in 2 zweimahl enthalten, wie 2 in 4, 4 in 8 u. s. w.

Item: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 u. s. f.

Dann wie sich z. E. 27 zu 9 verhält, so verhält sich auch 9 zu 3 und 3 zu 1, und 1 ist in 3 dreimahl enthalten, wie 3 in 9, 9 in 27 u. s. w. (s. §. 274).

Mit Buchstaben und allgemein ist die Bezeichnung, wann das erste und ein jedes der folgenden Glieder a und das Verhältnis, wie §. 312 die Differenz, m genennet wird, also:

a, am^1, am^2, am^3, am^4 u. s. f.

Wird nun z. E. $a = 2$ und $m = 3$ genommen, so bedeuten die Formeln: a, am^1, am^2, am^3 die Zahlen: 2, 6, 18, 54, d. i. m wird bei einem jeden Glied um einen Grad erhöhet (§. 29) und mit a multiplicirt.

§. 323. Hieraus erkennet man, daß das lezte Glied einer geometrischen Progression enthalte: das erste Glied mit dem Verhältnis multiplicirt, das zu demjenigen Grad erhaben ist, als Glieder der Progression weniger 1 vorhanden sind.

Z. E. am^4 zeiget an, daß das Verhältnis zum vierten Grad erhaben worden, mithin sothane Progression fünf Glieder enthalte.

Die allgemeine Formel des lezten Gliedes aber ist: am^{n-1}, das ist: a mit dem Verhältnis multiplicirt, welches zu dem Grad erhaben ist, als Glieder weniger 1 vorhanden sind.

§. 324. Es kommen daher bei einer jeden geometrischen Progression, wie bei einer Arithmetischen (§. 314), vier Stüke vor, auf welche man zu merken hat, als: das erste und lezte Glied, sodann das Verhältnis, Exponent oder der Angeber (§. 273), und die Anzahl der Glieder, von welchen jedesmahlen ein Stük gefunden werden kan, wann die übrige drei bekant sind.

§. 325. Diese vier Stüke werden also bezeichnet: das erste Glied mit a, das Lezte mit am^{n-1} (§. 323), das Verhältnis mit m, und die Anzahl der Glieder mit n.

§. 326. Ist das erste Glied, das Verhältnis und die Anzahl der Glieder bekant, das ist: werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird das lezte Glied, d. i. die Zahl desselben, gefunden, wann man das Verhältnis zu demjenigen Grad erhebet (§. 29), als die Zahl der Glieder weniger 1 ist, und die Formel mit a, als dem ersten Glied, multiplicirt (§. 223), als:

$$am^{n-1}$$

Das heist: m, als das Verhältnis, ist zu $n-1$, d. i. dem Grad, welcher die Anzahl der Glieder weniger 1 anzeiget, erhaben, und mit a, dem ersten Glied, multiplicirt (§. 322).

Wil

Wil man nun diese allgemeine Formel auf gemeine Zahlen bestimmen, so kan es nach Belieben, oder wie es ein Vorfall erfordert, geschehen, als z. E.

Es sei: $m = 3$, $n = 4$ und $a = 4$, so wird m zum vierten Grad erhaben, das ist: dreimahl mit sich selbst multiplicirt (s. §. 227 a^4).

$$\begin{array}{rl} 3 & \\ 3 & \\ \hline 9 & \\ 3 & \\ \hline 27 & \\ 3 & \\ \hline 81 & \text{Die Potenz vom vierten Grad.} \\ 4 & \text{Das erste Glied.} \\ \hline 324 & \text{Die Zahl des lezten Gliedes.} \end{array}$$

Nota. Wann eine Progression in gemeinen Zahlen formiret wird (§. 322), so ist das erste Glied nach Masgab einer Vorgabe entweder eine 1 oder eine Zahl; bei der Algebra aber wird ohne 1 das lezte Glied mit sothaner Zahl multiplicirt, welches zwar einerlei Product und gleichviel Glieder bringet, aber in vielen Fällen viel vortheilhafter ist.

Z. E. Daß beide Arten einerlei Product bringen, zeiget die Progression, da das erste Glied gleich 4 genommen wird, und die Erhebung durch das Verhältnis 3 geschiehet.

$$4 \times 3 = 12 \times 3 = 36 \times 3 = 108 \times 3 = 324$$
$$3 \times 3 = 9 \times 3 = 27 \times 3 = 81 \times 4 = 324$$

Ein Haus, darinnen 9 Zimmer befindlich, solte also verkauft werden, daß der Käuffer nur das gröste Zimmer bezahlen solte, also, daß man das Kleinste 3 kr. das Grössere 12 kr. das abermahl Grössere 48 kr. u. s. f. immer das folgende grössere Zimmer viermahl so viel kr. als das Nächstvorhergehende rechnen wolte. Fr. Wie hoch wäre also das neunte Zimmer gekommen? Antw. 3276 fl. 48 kr.

Die allgemeine Bezeichnung ist, wie bekant: $am^{n}-1$

Resolution:

Nach der Vorgabe muß $a = 3$, $m = 4$ und $n = 8$ sein, weil n Eins weniger anzeiget, als Glieder, nemlich 9, sind: wird nun m, d. i. 4, zu dem achten Grad erhaben (s. §. 227 a^{8}), so erhält man: 65536, diese mit a, d. i. 3, multiplicirt, so ist das Product: 196608 kr. oder: 3276 fl 48 kr.

Nimt man $a = 4$, d. i. das kleinste Zimmer, zu 4 kr. an, so wird die Potenz mit 4 multiplicirt, u. s. w. wie vorhin gelehret worden.

§. 327. **Ist das erste Glied, das Lezte und die Anzahl der Glieder bekant, d. i. werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen,** so kan das Verhältnis gefunden werden, wann man das lezte Glied durch das Erste dividirt und aus dem Quotienten die Wurzel derjenigen Potenz ziehet, welche die Anzahl der Glieder weniger 1 anzeiget (§. 326), als:

Allgemeine Auflösung:

$$\frac{a)\ am^{n}-1}{\sqrt{}^{n}\, m^{n}-1}$$ Ist das Verhältnis.

Nota. Hierbei versteht es sich von selbsten, daß die Zahl des lezten Gliedes nicht, wie §. 317 u. f. (s. a. §. 316 N.), willkührlich gegeben oder angenommen werden könne, sondern eine Potenz, die aus geometrischen Verhältnissen entstanden (s. §. 322), sein müsse.

Resolution:

Nimt man $a = 3$, $m = 4$ und $n = 2$, so ist $am^{n}-1 = 48$, diese mit 3 dividirt, kommen 16, hieraus die n Wurzel, das ist hier die Quadratwurzel, gezogen, bringt 4, als das Verhältnis; denn weil $n = 2$ genommen worden, so ist m, nemlich 4, zum zweiten Grad erhaben, folglichen wurde die Potenz eine Quadratzahl (§. 178).

Oder: Es sei $a = 2$, $m = 4$ und $n = 3$, so ist $am^{n}-1 = 128$, diese mit a, d. i. 2, dividirt, giebt 64, woraus die Wurzel des dritten Grads, d. i. die Cubicwurzel 4 (§. 207), und also hier das Verhältnis ist.

Neun

Neun Ehlen Zeug wurden also erlassen, daß die erste Ehle nur 4 kr. die andere und jede der folgenden Ehlen nach einem geometrischen Verhältnis mehr gelten solte, welchemnach die neunte Ehle auf 437 fl. 24 kr. gekommen wäre. Fr. Welches war das Verhältnis der Preisen? Antw. 3.

Allgemeine Auflösung.

$a) am^{n}-1$

$\sqrt[n]{m^{n}-1}$ Ist das Verhältnis der Preisen.

Resolution:

Hier muß $am^{n}-1$ gleich 437 fl. 24 kr. oder: 26244 kr. sein: da man nun weiß, daß das erste Glied $a = 4$ ist, so werden die Kreuzer durch 4 getheilet, wobei der Quotient 6561 komt; da ferner 9 Ehlen oder Glieder bekant sind, und die Potenz von m ein Grad weniger sein muß, als die Progression Glieder hat (§. 323), so folget, daß die Wurzel aus der Potenz vom achten Grad, d. i. 6561, hier ausgezogen werden müsse, welche 3 ist (§. 227 a^{8}).

§. 328. Ist das lezte Glied, das Verhältnis und die Anzahl der Glieder bekant, d. i. werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird das erste Glied gefunden, wann das lezte Glied mit der Potenz, NB. von eben den Graden weniger 2 dividirt wird, als:

Allgemeine Auflösung.

$m^{n}-2) am^{n}-1 \mid a$ Das erste Glied, von welcher Division §. 98. 3) nachgesehen werden kan.

Resolution:

Nimt man $m = 3$ und $n = 8$, so ist $m^{n} = 6561$, und $m^{n}-1$ zeiget 9 Glieder an (§. 323), davon das Lezte mit a, als dem ersten Glied, welches eine jede Zahl sein kan, multiplicirt ist (s. §. 326 Not.), mithin die Formel $am^{n}-1$ hat.

Werden nun für das lezte Glied 32805 gegeben (s. §. 327 N.), so müssen solche nach gegebener Regel durch $m^{n}-2$ dividirt werden, welche Formel das achte Glied andeutet, und $= 6561$ ist, folglichen 5 fürs erste Glied anzeigen muß.

Würden für das neunte Glied 19683 gegeben (s. §. 327 Not.), und $m = 3$ bekant gemacht, so wäre das vorstehende achte Glied $= 6561$, und der Quotient, wann jenes durch dieses dividirt würde, 3, als das erste Glied.

Ueberhaupt, wann man das lezte Glied durch die Potenz, welche entstehet, wann das bekante Verhältnis einmahl weniger mit sich selbst multiplicirt wird, als Glieder vorhanden sind, dividirt, so ist der Quotient gleich dem ersten Glied.

Ein Plaz, so 10 Quadratruthen enthielte, solte also erlassen werden, daß für die erste Ruthe etliche Bazen, für die Zweite viermahl so viel, für die Dritte viermahl so viel als für die Zweite, u. s. f. immer für die Folgende viermahl so viel als für die Nächstvorhergehende gegeben werden solte, da dann die zehnte Ruthe auf 1572864 Bazen gekommen wäre. Fr. Wie hoch ist die erste Ruthe angeschlagen gewesen? Antw. 6 Bazen.

Allgemeine Auflösung.

$m^{n-2}) \; am^{n-1} \mid a$ das erste Glied.

Hier muß $m = 4$ in die Potenz vom neunten Grad erhaben werden, weil die Progression zehn Glieder hat (§. 323): diese Potenz vom neunten Grad bestehet in 262144 (§. 227 a^9), mit welcher das gegebene lezte Glied dividiret wird:

262144) 1572864 | 6 Bazen war die erste Ruthe ange-
          1572864   schlagen.

§. 329. Ist das erste und lezte Glied und das Verhältnis bekant, d. i. werden diese Stüke gegeben, oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird die Anzahl der Glieder gefunden, wann man den Logarithmus des ersten Gliedes von dem Logarithmus des lezten Gliedes subtrahirt, den Rest durch den Logarithmus des Verhältnisses dividirt, und zum Quotienten 1 addirt, als:

Allgemeine Auflösung:

$$\frac{Lam^{n-1} - La}{Lm} + 1$$

§. 330. Weil aber hernach erst von den Logarithmen gehandelt wird, und die Auflösung §. 476 vorkomt, so begnüge

gnüge man sich jezo mit der Regel: daß das lezte Glied mit dem Verhältnis rükweegs, so oft es thunlich, wiederum dividirt werde, gleichwie solches durch die Multiplication desselben entstanden ist (§. 322 u. f.) als:

$m)\ am^6$ Leztes Glied.
$m)\ am^5$
$m)\ am^4$
$m)\ am^3$
$m)\ am^2$
$m)\ am^1$
a Erstes Glied, mithin sind bei dieser Progreßion 7 Glieder vorhanden, woraus man zugleich deutlich erkennet, warum die Potenz — 1 die Glieder anzeiget (§. 323).

Resolution:

Wann $a = 4$, $m = 3$, und das lezte Glied 2916 ist, so wird die Anzahl der Glieder also gefunden: 3) 2916 | 3) 972 | 3) 324 | 3) 108 | 3) 36 | 3) 12 | 4 das erste Glied, und noch 6 Glieder mit dem Verhältnis 3.

Ein Roßkamm wolte seine Pferde also erlassen, daß er für das Erste 5 kr. für das Zweite 20 kr. für das Dritte 80 kr. u. s. f. bis dieselbige nach sothanem geometrischen Verhältnis auf 1365 fl. 20 kr. kämen. Fr. Wie viel sind der Pferde gewesen? Antw. 8.

1365 fl. 20 kr.
60
4) 81920 (8
4) 20480 (7
4) 5120 (6
4) 1280 (5
4) 320 (4
4) 80 (3
4) 20 (2
5 (1

§. 331.

§. 331. Ist, wie §. 329, das erste und lezte Glied und das Verhältnis bekant, d. i. werden diese Stüke gegeben oder nach Belieben für bekant angenommen, so wird die Summe der Progression gefunden, wann das lezte Glied mit dem Verhältnis multiplicirt, vom Product das erste Glied subtrahirt, und der Rest durch das Verhältnis weniger 1 dividirt wird, als:

Allgemeine Auflösung:

$$\frac{(am^{n-1})\,m) - a}{m - 1}$$

Resolution:

Wird $a = 4$, $m = 3$, $n = 4$ genommen,
so ist $am^{n-1} = 324$, dann 4 viermahl mit 3 erhaben giebt so viel.
Mit m multiplicirt . 3
972
$-a = -4$
Mit $m - 1$ div. 2) 968
484 Summe der Progression, nach diesen angenommenen Wehrten der Buchst.

Probe:

4 × 3 = 12 × 3 = 36 × 3 = 108 × 3 = 324 Leztes Glied.
4 + 12 + 36 + 108 + 324 = 484 Die Summe.

Ein Ring mit 9 Steinen besezt solte also erlassen werden, daß der erste Stein nur 3 kr. der Zweite 9 kr. der Dritte 27 kr. u. s. f. kosten solte: da nun der Neunte auf solche Weise auf 328 fl. 3 kr. gekommen wäre, so ist die Frage, wie hoch dieser Ring gestanden hätte?

Allgemeine Auflösung:

$$\frac{(am^{n-1})\,m) - a}{m - 1}$$

Resolution:

am^{n-1} ist gleich 328 fl. 3 kr.
$m =$ 3
984 fl. 9 kr.
$-a =$ −3
$m - 1$ ist = 2) 984 fl. 6 kr.
492 fl. 3 kr. hätte der Ring gestanden.

§. 332.

§. 332. Gleichwie nun bei einer arithmetischen Progression die Summen zweier gegeneinander stehenden Glieder gleich sind (§. 320 Not.), also sind hier die Producten derselben einander gleich, dabei das mitlere Glied bei ungeraden Gliedern, anstatt daß es dorten doppelt genommen, hier mit ihm selbst multiplicirt oder quadrirt wird.

Z. E. Die Progression sei:

4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128

512

512

512

Oder: 4 . 8 . 16 . 32 . 64

256

256

256

§. 333. Hieraus kan zur Summirung einer geometrischen Progression eine allgemeine Formel hergeleitet werden; dann wann der Unterschied zwischen dem ersten und lezten Glied mit dem Verhältnis weniger 1 dividirt, u. zum Quotienten das lezte Glied addirt wird, so hat man die Summe einer Progression.

Das lezte Glied ist: am^{n-1} (§. 325).

Der Unterschied: $am^{n-1} - a$

Diesen mit $m - 1$ divid. $\frac{am^{n-1} - a}{m - 1}$ Hierzu das lezte Glied addirt,

so ist die allgemeine Summe: $\frac{am^{n-1} - a}{m - 1} + am^{n-1}$

Resolution: Nimt man $a = 2$, $m = 3$ und $n = 4$,

so ist $am^{n-1} = 162$; dann 2 mit 3 viermahl erhaben, thut so viel.

$a = -2$

Mit $m - 1$, d. i. 2 div. 2) 160

80

Hierzu das lezte Glied add. 162

242 Summe der Progression.

Probe: $2 \times 3 = 6 \times 3 = 18 \times 3 = 54 \times 3 = 162$

$2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242$ Summe.

Nota

Nota I. Diese und jene Formel §. 331 sind von einerlei Gebrauch und Nuzen, folglichen kan von beiden eine nach Belieben erwählet werden.

Nota II. Nach sothanen Formeln muß bekant sein oder bestimt werden: das erste und lezte Glied (s. §. 327 Not.), nebst dem Verhältnis, folglichen muß in Ermangelung deren eines, dasselbe nach dem Vorhergehenden erst gesucht werden, welches durch folgende ganz leichte Exempeln gezeiget werden sol, als:

a) Da die Zahl des lezten Gliedes unbekant ist, und nach §. 326 erst gesucht werden muß.

Z. E. Bei einer geometrischen Progression ist das erste Glied 2, das Verhältnis 3, und die Anzahl der Glieder 5, welches ist die Summe?

Nach §. 326 ist die allgemeine Formel über die Zahl des lezten Gliedes:

$$am^{n-1}$$

Resolution: a ist nach der gegenwärtigen Bestimmung $= 2$, $m = 3$, welches zu dem vierten Grad erhaben, und mit a multiplicirt zum lezten Glied 162 bringt.

Nun ist die Resolution der allgemeinen Formel über die Summe nach §. 331:

$$\frac{(am^{n-1})\,m) - a}{m - 1}$$

a ist $= 2$, diese mit 3 viermahl multiplicirt, giebt: 162
Mit m, d. i. 3, multiplicirt 3
486
a, d. i. 2, subtrahirt . . . . -2
Mit $m - 1$, d. i. 2, dividirt . . 2) 484
242 ist die Summe.

b) Da

b) Da das Verhältnis unbekant ist, und nach §. 327 erst gesuchet werden muß.

Z. E. Bei einer geometrischen Progression ist das erste Glied 2, die Anzahl der Glieder 5, und die Zahl des lezten Gliedes 162, welches ist die Summe?

Nach §. 327 ist die allgemeine Formel des Verhältnisses:

$$a)\ \frac{am^{n-1}}{\sqrt{^{n}m^{n-1}}}$$

Resolution:

Das lezte Glied am^{n-1} ist nach gegenwärtiger Bestimmung $= 162$ Dieses mit

a, d.i. 2, divid. $2\overline{)162}$ = 81

Da nun die Glieder, nemlich 5, bekant sind, so bedeutet n den vierten Grad, darzu m als das Verhältnis erhaben worden, folglichen muß aus der Potenz vom vierten Glied, d. i. 81, die Wurzel gezogen werden (§. 227 a^4), welche 3 und das gesuchte Verhältnis ist.

Nun ist die Resolution der allgemeinen Formel über die Summe, nach §. 331:

$$\frac{(am^{n-1})m) - a}{m - 1}$$

a ist $= 2$, diese mit 3 viermahl multiplicirt, giebt: 162
mit m, d.i. 3, multiplicirt 3
486
a, d. i. 2, subtrahirt . . . — 2
Mit $m - 1$, d. i. 2, dividirt . . . 2) 484
242 ist die Sume.

c) Da das erste Glied unbekant ist, und nach §. 328 gesucht werden muß.

Z. E. Bei einer geometrischen Progression ist das lezte Glied 162, die Anzahl der Glieder 5, und das Verhältnis 3, welches ist die Summe?

Nach §. 328 ist die allgemeine Formel des ersten Gliedes:

$m^{n-2}) \, a m^{n-1}) \, a$

Resolution:

Das erste Glied, d. i. a, ist nach gegenwärtiger Bestimmung $= 2$

Nun ist die Resolution der allgemeinen Formel über die Summe nach §. 331:

$$\frac{(a m^{n-1}) \, m) - a}{m - 1}$$

a ist $= 2$, diese mit 3 viermahl multiplicirt, giebt:	162
mit m, d. i. 3, multiplicirt	3
	486
a, d. i. 2, subtrahirt . . .	— 2
Mit $m - 1$, d. i. 2, dividirt . . . 2)	484
Die Summe:	242

§. 334. **Wird zu einer geometrischen Progression das erste und zweite Glied, wie bisher, in ganzen Zahlen gegeben, um nach dem Verhältnis derselben bis zu einem bestimten Ziel fortzuschreiten (§. 309), so ist nach §. 274 bekant, wie solch Verhältnis gefunden werde; bestehen aber die Glieder ein- oder beiderseits in gebrochenen Zahlen, so müssen solche erst nach §. 128 gleich gegrössert werden, mit der Vorsicht, daß das zweite Glied, als der Divisor, auf seiner Stelle bleibe (§. 274), s. das Gegentheil §. 154, worauf alsdann nach gedachtem 274sten §en verfahren wird: s. auch vom Grössern der Glieder §. 295 u. f.**

Z. E.

Z. E. Die Glieder $\frac{3}{8}$ und 1 würden zur Progression gegeben, so müste untersuchet werden, wie sich $\frac{3}{8}$ gegen 1 verhalte, um das dritte und die folgende Glieder darnach formiren zu können, welches also geschiehet:

$$\begin{array}{c} \frac{1}{1} : \frac{3}{8} \\ \hline 1 : 3 \\ 8 : 1 \\ \hline 8 : 3 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{8}{3}$, d. i. $2\frac{2}{3}$, das Verhältnis: dann wann $\frac{3}{8}$ mit $2\frac{2}{3}$ multiplicirt wird, so giebt es 1, dieses mit $2\frac{2}{3}$ multiplicirt, giebt $2\frac{2}{3}$, dieses mit $2\frac{2}{3}$ multiplicirt, macht $7\frac{1}{9}$ u. s. f.

Item: Es würden die Glieder 2 und $2\frac{1}{4}$ gegeben, so wäre die Auffsuchung des Verhältnisses:

$$\begin{array}{c} 2\frac{1}{4} : 2 \\ \hline 9 : 8 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{9}{8}$, d. i. $1\frac{1}{8}$, das Verhältnis: dann wann 2 mit $1\frac{1}{8}$ multiplicirt wird, so ist das Product $2\frac{1}{4}$, als das zweite Glied, u. s. f.

Oder: Es wären die Glieder $\frac{5}{6}$ und $1\frac{2}{3}$ gegeben:

$$\begin{array}{c} 1\frac{2}{3} : \frac{5}{6} \\ \hline 5 : 5 \\ 6 : 3 \\ \hline 30 : 15 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{30}{15}$, d.i. 2, das Verhältnis: dann 2mahl $\frac{5}{6}$ ist $1\frac{2}{3}$ u. s. f.

Oder: Es wären die Glieder $1\frac{1}{4}$ und $2\frac{2}{3}$ gegeben:

$$\begin{array}{c} 2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{4} \\ \hline 8 : 5 \\ 4 : 3 \\ \hline 32 : 15 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{32}{15}$, d. i. $2\frac{2}{15}$, das Verhältnis: dann $2\frac{2}{15}$mahl $1\frac{1}{4}$ macht $2\frac{2}{3}$ u. s. f.

§. 335. Hat man also das Verhältnis gefunden, so wird alsdann nach den Regeln der Multiplication (§. 143 u.f.) das erste Glied mit demselben, sodann das Product wiederum mit demselben u. s. f. bis zum bestimten Glied multiplicirt.

Z. E. Es sei das erste Glied 2, und das gefundene Verhältnis $1\frac{1}{8}$, d. i. $\frac{9}{8}$, so ist die Progression bis zum fünften Glied:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{18}{8} \cdot \frac{162}{64} \cdot \frac{1458}{512} \cdot \frac{13122}{4096}$$

Zur Uebung können Anfängere bei sothanen Progressionen nach §.326 das lezte Glied, nach §.327 das Verhältnis, nach §.328 das erste Glied, nach §.330 die Anzahl der Glieder, und nach §.331 u. f. die Summe der Progression suchen.

Z. E. Bei vorstehender Progression ist das Verhältnis $\frac{9}{8}$: wird dieses nach §. 326 zur Potenz vom dritten Grad erhaben, und dieselbige mit dem ersten Glied $\frac{2}{1}$ multiplicirt, so erhält man das lezte Glied, also:

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{81}{64} \cdot \frac{729}{512} \cdot \frac{6561}{4096} \text{ mit } \frac{2}{1} \text{ multiplicirt, giebt: } \frac{13122}{4096}$$

Nota. Befindet sich unter den bekanten Zahlen (§. 324) die Summe der Progression, so kan die Auflösung erst bei den quadratischen Gleichungen gezeiget werden (§. 576).

§. 336. Ist das erste Glied grösser als das Zweite, so wird hierdurch eine absteigende Progression (§. 322) veranlasset.

Z. E. Das erste Glied sei 4, das Zweite 2, so ist das Verhältnis $\frac{1}{2}$, und so der Glieder acht sein sollen, die absteigende Progression also:

$4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32}$; dann das Verhältnis 4 zu 2 ist: $2 : 4$

$\frac{2}{4}$, oder $\frac{1}{2}$

Sol nun von dieser Progression z. E. das lezte Glied gesuchet werden, so geschiehet solches, wie §. 326 gelehret worden, dabei die allgemeine Formel des lezten Gliedes eben jene ist:

$$am^{n-1}$$

Wird hier $m = \frac{1}{2}$ zu derjenigen Potenz erhaben, welche aus so viel Graden bestehet, als Glieder weniger Eins vorhanden sind, und dieselbige alsdann mit dem ersten Glied multiplicirt, so hat man das lezte Glied, als: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{128}$, diese Potenz mit 4 multiplicirt, giebt: $\frac{4}{128}$, oder reducirt: $\frac{1}{32}$, als das lezte Glied.

Zur Uebung können Lernende die übrige Fragen nach §. 327 u. f. ebenfals auflösen.

§. 337. Wird einer solchen Progreßion kein endliches Ziel gesezet, sondern die Glieder derselben sollen ohne aufzuhören in der bestimten Ordnung fortgesezet werden, so wird solches eine unendliche Reihe, oder infinita Series, genennet.

§. 338. Nichts destoweniger kan doch die Summe einer solchen unendlichen Progreßion gefunden werden, indeme man den unendlich kleinsten Theil für 0 oder nichts achtet, weil derselbe vor unsern Augen nicht da sein kan (vergl. mit §. 167 u. f.).

§. 339. Dieses geschiehet, wann das erste Glied durch 1 weniger dem Verhältnis dividirt wird, als:

$$\frac{a}{1 - m}$$

Resolution:

1) Da das Verhältnis dem ersten Glied gleich ist.

Es sei $a = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, so ist $1 - m = \frac{1}{2}$.

Wird nun $\frac{1}{2}$ mit $\frac{1}{2}$ dividirt, so komt zur Summe: 1; die Progreßion selbsten aber wäre $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, und so unendlich fort.

Nota. Wann das Verhältnis zwischen zwei gebrochenen Zahlen, welche zu einer absteigenden Progreßion gegeben worden, gesuchet, und also das erste Glied gegen das Zweite verglichen werden sol, so geschiehet solches wie §. 274, nur daß die Division mit einem Bruch (§. 149 u. f.) beobachtet werde.

Z. E. Es seien zum ersten und zweiten Glied gegeben: $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, so ist die Aufsuchung:

$\frac{1}{4}$: $\frac{1}{2}$ Divisor.

$\frac{1}{2}$ umgew. $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, d. i. $\frac{1}{2}$ das Verhältnis.

Oder: Die Zahlen seien: $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{9}$:

$\frac{1}{9}$: $\frac{1}{3}$ Divisor.

$\frac{1}{3}$ umgew. $\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$, d. i. $\frac{1}{3}$ das Verhältnis.

Oder: Die Zahlen seien: $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{16}$:

$\frac{1}{16}$: $\frac{1}{4}$ Divisor.

$\frac{1}{4}$ umgew. $\frac{4}{1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$, d. i. $\frac{1}{4}$ das Verhältnis.

Oder: Die Zahlen seien: $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{25}$:

$\frac{1}{25}$: $\frac{1}{5}$ Divisor.

$\frac{1}{5}$ umgew. $\frac{5}{1} \cdot \frac{1}{25} = \frac{5}{25}$, d. i. $\frac{1}{5}$ das Verhältnis.

Item: Die Zahlen: $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{15}$ seien gegeben:

$\frac{1}{15}$: $\frac{1}{3}$ Divisor.

$\frac{1}{3}$ umgew. $\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{15} = \frac{3}{15}$, d. i. $\frac{1}{5}$ das Verhältnis.

Item: Die Zahlen seien: $\frac{3}{4}$ und $\frac{3}{8}$:

$\frac{3}{8}$: $\frac{3}{4}$ Divisor.

$\frac{3}{4}$ umgew. $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{24}$, d. i. $\frac{1}{2}$ das Verhältnis.

Oder: Es seien die Zahlen: $\frac{5}{7}$ und $\frac{5}{21}$:

$\frac{5}{21}$: $\frac{5}{7}$ Divisor.

$\frac{5}{7}$ umgew. $\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{21} = \frac{35}{105}$, d. i. $\frac{1}{3}$ das Verhältnis.

Item: $\frac{3}{5}$ und $\frac{6}{35}$ seien die Zahlen:

$\frac{6}{35}$: $\frac{3}{5}$ Divisor.

$\frac{3}{5}$ umgew. $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{35} = \frac{30}{105}$, d. i. $\frac{2}{7}$ das Verhältnis.

Item: Wann addirt werden sollen: $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ und so unendlich fort, so ist das erste Glied $\frac{1}{3}$, welches durch 1, weniger dem Verhältnis, das $\frac{1}{3}$ ist, dividirt wird, also:

$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ umgewandt $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$ oder $\frac{1}{2}$.

Also ist die Summe dieser unendlichen Reihe Brüche: $\frac{1}{2}$.

Item: Die Summe von $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ und so unendlich fort, ist $\frac{1}{3}$; dann $\frac{1}{4}$ durch 1 — dem Verhältnis $\frac{1}{4}$, d. i. $\frac{3}{4}$ dividirt, giebt $\frac{1}{3}$, also:

$\frac{3}{4}$ umgew. $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{3}$.

Item: Die Summe: $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625}$ u. s. f. ist $\frac{1}{4}$; dann $\frac{1}{5}$ durch 1 — dem Verhältnis $\frac{1}{5}$, d. i. $\frac{4}{5}$ dividirt, giebt $\frac{1}{4}$, also:

$\frac{4}{5}$ umgew. $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{20}$ oder $\frac{1}{4}$.

2) Da das Verhältnis dem ersten Glied nicht gleich ist.

Z.E. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{75} + \frac{1}{375}$ und so unendlich fort zu addiren.

Hier ist das Verhältnis $\frac{1}{5}$, mithin der Divisor: $1 - \frac{1}{5}$, d.i. $\frac{4}{5}$, damit $\frac{1}{3}$ dividirt: $\frac{4}{5}$ umgew. $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$, als die Summe der Brüche, so in diesem Verhältnis unendlich fortgehen.

3) Da die Zähler der Brüche mehr als 1, doch aber einander gleich sind.

Z.E. $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}$ u. s. f. zu addiren.

Hier ist das Verhältnis $\frac{1}{2}$, mithin der Divisor: $1 - \frac{1}{2}$, d. i. $\frac{1}{2}$, damit $\frac{3}{4}$ dividirt: $\frac{1}{2}$ umgew. $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$ die Summe.

Item: Bei der Reihe: $\frac{5}{7} + \frac{5}{21} + \frac{5}{63} + \frac{5}{189}$ u. s. f. ist das Verhältnis $\frac{1}{3}$, mithin ist der Divisor: $1 - \frac{1}{3}$, d. i. $\frac{2}{3}$, und die Division also: $\frac{2}{3}$ umgew. $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{14}$, d. i. $1\frac{1}{14}$ als die Summe.

4) Da Zähler und Nenner der Brüche in einer geometrischen Progression fortgehen.

Z.E. $\frac{3}{5} + \frac{6}{35} + \frac{12}{245} + \frac{24}{1715}$ u. s. f.

Hier ist das Verhältnis $\frac{2}{7}$, mithkn der Divisor: $1 - \frac{2}{7}$, d. i. $\frac{5}{7}$, damit $\frac{3}{5}$ dividirt: $\frac{5}{7}$ umgew. $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{25}$ die Summe.

5) Da das erste Glied eine ganze Zahl ist (§. 336).

Z.E. $16 + 12 + 9 + 6\frac{3}{4}$, oder, da Scheinbrüche formiret werden: $\frac{16}{1} + \frac{48}{4} + \frac{144}{16} + \frac{432}{64}$ u. s. f.

Hier ist das Verhältnis $\frac{3}{4}$, mithin der Divisor: $1 - \frac{3}{4}$, d. i. $\frac{1}{4}$, damit $\frac{16}{1}$ dividirt: $\frac{1}{4}$ umgew. $\frac{4}{1} \cdot \frac{16}{1} = \frac{64}{1}$ oder 64.

§. 340. **Wie man zwischen zwo Zahlen so viele geometrische Zwischenproportionalzahlen, oder zwischen dem ersten und lezten Glied einer geometrischen Progression so viel Glieder finden könne, als man wolle** (§. 308 Not.), darzu hat man folgende Regeln:

1) Dividirt man die grössere Zahl, d. i. das lezte Glied, durch das kleinste oder erste Glied, und ziehet aus dem Quotienten die Wurzel eines solchen Grads der Potenz, als die begehrte Gliedtr und 1 sind.

 2) Mul-

2) Multiplicirt man mit sothaner Wurzel die kleinste Zahl, so komt das erste Zwischenproduct, wird dieses wieder damit multiplicirt, so komt das Zweite u. s. w.

Z. E. Man wolte zwischen 5 und 320 zwei Zwischenproducten wissen:

$$5)\ \underline{320}$$
$$64$$

Da nun der begehrten Zwischenproducten 2 sind, so muß aus 64 die Wurzel aus der Potenz vom dritten Grad, d. i. die Cubicwurzel, gezogen werden, welche, nach §. 207, 4 ist.

Wird mit dieser Wurzel die kleinste Zahl, so hier 5 ist, multiplicirt, und das Product abermahl damit, so hat man die beide Zwischenproducten, als:

5 . 20 . 80 . 320.

Item: Man wolte zwischen 4 und 2916 fünf Zwischenproducten haben.

4) 2916 | 729
13

Nun sind fünf Zwischenproducten und 1 = 6, mithin ist aus der Potenz a^6 die Wurzel zu ziehen, welche 3 ist (§.227 a^6).

Die Multiplication mit 3 ist nun:

4 . 12 . 36 . 108 . 324 . 972 . 2916.

§. 341. Hierbei verstehet es sich von selbsten, daß zu Aufsuchung der Zwischenproducten oder Proportionalzahlen die gröste darzu gegebene Zahl schiklich, d. i. eine aus einer geometrischen Progression würklich entstandene Zahl sein müsse (§. 327 Not.), widrigenfals bei dem Ausziehen der Wurzel übrig bleiben muß.

Nota. Was die harmonische Progression betrift (§. 311), so bestehet solche in einer Reihe Zahlen, welche in einer harmonischen Proportion fortgehen, davon §. 310 gesagt worden, daß solche bei den Gleichungen gezeiget werden solte.

§. 342. Da verschiedene Arten der Interesserechnung in einer geometrischen Progression bestehen, so werden etliche Vorgaben derselben hier angefüget.

Z. E. Ein Wucherer lehnte einem Bedrängten 1000 Thlr. auf 4 Jahre zu 5 pro Cento, mit dem Beding, daß die Interessen alljährlich wieder zum Capital geschlagen werden solten. Fr. Wie viel muste am Ende der vier Jahren bezahlt werden?

Hierbei wird voraus gesezet, daß die Interessen allezeit jährlich einen oder etliche Theile vom Capital machen, als: Wann sie zu 5 vom Hundert bestimt sind, thun solche $\frac{1}{20}$, zu 4 vom Hundert $\frac{1}{25}$, zu 6 vom Hundert $\frac{3}{50}$, u. s. f. vom Capital, es mag dasselbe so gros oder so klein sein, als es wolle.

Solchemnach sind bei gegenwärtiger Vorgabe die Interessen zu 5 pro Cento $\frac{1}{20}$ von 1000, mithin das erste Glied der Progression: 1000, das zweite Glied $1\frac{1}{20}$ mahl so viel, das Dritte wieder $1\frac{1}{20}$ mahl so viel, als das zweite Glied u. s. f. und also bei sothaner Progression das Verhältnis $1\frac{1}{20}$, oder: $\frac{21}{20}$ (§. 335).

Da nun §. 326 die allgemeine Formel von der Zahl des lezten Gliedes also ist:

$$a m^{n-1}$$

so zeiget solche hier an, daß $a = 1000$, $m = 1\frac{1}{20}$, und $n = 4$ sei (§. 323), mithin die Resolution also geschiehet:

$1\frac{1}{20}$, d. i. $\frac{21}{20}$ dreimahl mit sich selbst, und das Product mit 1000 multiplicirt, giebt: $\frac{19448\,1000}{160000}$.

Dieser Scheinbruch wird reducirt:

16,0000) 19448,1000 | 1215 $\frac{81}{160}$ Thlr.
328 $\frac{81}{160}$

oder, da man den Bruch in kleinen Sorten haben wil:

81
90
16,0) 729,0 | 45 kr.
8(9
4 | $2\frac{1}{4}$ Pf.
36
(4

Also müssen zu End der vier Jahren bezahlt werden:

1215 Thlr. 45 kr. $2\frac{1}{4}$ Pf.

Item: Wann 1560 Thlr. zu 6 pro Cento nach voriger Art auf vier Jahre ausgelehnet wären, wie groß würde am Ende das Capital sein?

Die allgemeine Formel des lezten Gliedes ist bekantlich:

$$am^{n-1}$$

dabei nach dieser Vorgabe $a = 1560$, $m = 1\frac{3}{50}$ und $n = 4$.

Die Resolution ist:

$1\frac{3}{50}$, d. i. $\frac{53}{50}$, dreimahl mit sich selbst, und das Product mit 1560 multiplicirt, giebt:

$$\frac{12309150360}{6250000}$$

Dieser Scheinbruch wird reducirt:

```
625,0000) 1 2 3 0 9 1 5(0 3 6 0 | 1969 2900360/6250000 Thlr. würde am
              6 0 5 4 1(0                       Ende das Capital sein.
                4 3 9(9
                  5(2
```

Nota I. Gleichwie bei einer geometrischen Progression, wann das Verhältnis 1 und ein Bruch ist, dieselbige auch als eine Addition betrachtet werden kan, indeme ein jedes folgende Glied entstehet, wann zu dem Vorhergehenden die Theile aus demselben, welche das Verhältnis anzeiget, addirt werden, also können diese Art Vorgaben berechnet werden, wann man die Interessen, als einen oder etliche Theile, vom Capital (§. 342), alljährlich zum Capital addirt.

Z. E. 1000 Thlr. gegen 5 pro Cento Interessen ausgeliehenes Capital, da der Zins alljährlich wieder zum Capital geschlagen werden sol, zu berechnen.

Damit die Brüche vermieden werden, welche bei dem Dividiren entstehen, so wird der Thaler zu 1000 Theilgen angenommen, zu welchen das Uebrigbleibende resolviret wird, welche alsdann allezeit durch 20 ohne Rest dividirt werden können.

20) 1000 Thlr.
50

20) 1050 Thlr. Capital und Interessen des ersten Jahrs.
52 . 500

20) 1102 . 500. Thlr. Capital u. Interessen des zweiten Jahrs; dann bei dem Dividiren blieben 10 Thlr. übrig, welche 10000 Theilgen machten, die durch 20 dividirt wurden.

55 . 125

1157 . 625. Thlr. Capital und Interessen des dritten Jahrs; dann bei dem Dividiren blieben 2 Thlr. übrig, welche 2000 Theilgen machten, die zu den nebenstehenden 500 addirt und die Summe durch 20 dividirt wurde.

20) 1157 . 625
57 . 881

20) 1215 . 506. Thlr. Capital und Interessen des vierten Jahrs; dann bei dem Dividiren blieben 17 Thlr. übrig, welche 17000 Theilgen machten, die zu den nebenstehenden 625 addirt, und die Summe durch 20 dividirt wurde, dabei man den Rest von 5 nicht achtete: und da bei der Addition der Theilgen 1506 kamen, wurden 1000 weg- und als 1 Thlr. zu den Thalern genommen.

60 . 775

1276 . 281. Thlr. Capital und Interessen des fünften Jahrs; dann bei dem Dividiren blieben 15 Thlr. übrig, welche 15000 Theilgen machten, die zu den nebenstehenden 506 addirt, und die Summe durch 20 dividirt wurde, dabei man den Rest von 6 nicht achtete: und da bei der Addition der Theilgen 1281 kamen, wurden 1000 weg- und als 1 Thlr. zu den Thalern gezählet.

Auf welche Weise man ferner auf das sechste und folgende Jahren nach Belieben fortgehen kan.

Nota II. Nebst der Zahl des lezten Gliedes, oder der zu zahlenden Summe, kan auch das Verhältnis (§. 327), das ist, das bestimte Interesse, das erste Glied (§. 328), wie groß nemlich das Capital sei, und die Anzahl der Glieder (§. 329), so die Jahre anzeigen, gefunden werden, wovon die Proben nach vorstehendem Exempel angestellet werden sollen, als:

a) Einer hatte ein Capital von 1560 Thlr. auf vier Jahre mit dem Beding ausgelehnet, daß die jährliche Interessen allemahl wiederum zum Capital geschlagen werden solten, und zur Verfallzeit $1969\frac{2900360}{6250000}$ Thlr. erhielte. Fr. Wie wurden die Interessen berechnet?

Nach §. 327 wird das Verhältnis also gesucht:

$$a)\ \frac{am^{n}-1}{\sqrt{^{n}m^{n}-1}}$$

Hier muß $am^{n}-1$ gleich der gegebenen Summe sein, welche mit a, d. i. hier 1560, dividirt werden muß.

Zu dem Ende werden die Ganze und der Bruch einerleinahmig resolviret oder eingerichtet, komt:

$$\frac{12309150360}{6250000}$$

welcher mit dem ersten Glied a, das ist hier 1560, dividirt wird, um dasselbe von der Progression wegzubringen, da dann komt:

$$\frac{7890481}{6250000}$$

Aus diesem Bruch, nemlich aus Zähler und Nenner (§. 173), soll nun nach der allgemeinen Formel die Wurzel gezogen werden, und zwar die Biquadrat- oder Quadratoquadratwurzel (§. 227 a^4).

Dann da die bestimte vier Jahre fünf Glieder der Progression machen, so muß das Verhältnis zum vierten Grad erhaben (§. 323), und also dreimahl mit sich selbst multiplicirt sein (§. 227 a^4).

Zu dieser Ausziehung der Biquadratwurzel ist aber hier keine Anweisung gegeben (§. 227), und mittelst der Logarithmen ist es auch nicht thunlich, weilen die Zahlen derselben nur bis auf fünf Ziffern gehen (s. §. 464); jedoch kan es geschehen, wann erstlich die Quadratwurzel extrahirt, und aus

der

der erhaltenen Wurzel wiederum die Quadratwurzel gezogen wird (s. §. 227 a^4), also:

```
       7,8 9,0 4,8 1 |    2 8,0 9 | 53 Die Wurzel aus dem
       4 . . . . . . |    2 5 . . |    Zähler.
       -------------      -------
4000)  3 8 9 0 4 8 1   100) 3 0 9
       3 2 0 0 0 0 0        3 0 0
       -------------      -------
         6 9 0 4 8 1            9
         6 4 0 0 0 0            9
       -------------      -------
5600)    5 0 4 8 1              0
         5 0 4 0 0
       -------------
               8 1
               8 1
       -------------
                 0
```

```
      6,2 5,0 0,0 0 | 2 5,0 0 | 50 Die Wurzel aus dem Nenner.
      4 . . . . . . | 2 5 . . |
      -----------------------
4000) 2 2 5 0 0 0 0       0 0
      2 0 0 0 0 0 0
      -------------
        2 5 0 0 0 0
        2 5 0 0 0 0
      -------------
                  0
```

Also ist das Verhältnis bei dieser Progression: $\frac{53}{50}$, oder: $1\frac{3}{50}$, folglichen sind die Interessen 6 pro Cento gerechnet (s. §. 342).

Nota. Hierbei ist wohl zu merken, daß, wann sich bei einem gegebenen Capital ein Bruch befindet, er mag von kleinern, oder, wie gegenwärtig, von den grössern Sorten oder Dingen bestehen, man fragen müsse, ob derselbe reducirt sei, weil in diesem Fall eine Auflösung entweder sehr schwer oder gar ohnmöglich sein würde.

b) Von einem Capital, welches auf vier Jahre zu sechs pro Cento also ausgeliehen war, daß die jährliche Interessen jederzeit wieder zum Capital geschlagen werden solten, giengen zu Ende der vier Jahren $1969\frac{2900360}{6250000}$ Thlr. ein. Fr. Wie groß war solches anfänglich?

Nach §. 328 wird das erste Glied also gesucht:

$$m^{n-2})\ am^{n-1}\ |\ a$$ Das erste Glied.

Wann man solchemnach das lezte Glied durch das Vorhergehende (s. §. 53) dividirt, so ist der Quotient gleich dem ersten Glied (§. ibid.).

Nun ist hier $m^n = 1\frac{3}{50}$, oder $\frac{53}{50}$, zum vierten Grad erhaben, d. i. dreimahl mit sich selbst multiplicirt (§. 227 a^4), weil die Progression fünf Glieder hat, mithin ist das vorhergehende Glied eben dieses vierte Glied, mit welchem das fünfte Glied, ne:nlich: $1969\frac{2900360}{6250000}$, dividirt werden muß.

Wird aber $\frac{53}{50}$ dreimahl mit sich selbst multiplicirt, so ist die Potenz vom vierten Grad: $\frac{7890481}{6250000}$, mithin das vierte Glied, mit welchem das Fünfte also dividirt wird:

$$1969\frac{2900360}{6250000}$$

$$\frac{7890481}{6250000}\Big)\ \frac{12309150360}{6250000}\ \Big|\ \frac{1560}{1}$$, d. i. 1560 Thlr. war anfänglich das Capital.

Dann wann man vermuthen kan, daß Zähler und Nenner des Dividenden durch Zähler und Nenner des Divisoren ohne Rest theilbar seien, so ist die Procedur mit Umwenden des Divisors (§. 149) nicht nöthig.

c) Ein Capital von 1560 Thlr. wurde auf etliche Jahre zu 6 pro Cento also ausgelehnet, daß alljährlich die Interessen wieder zum Capital geschlagen werden solten; da nun solches zur Verfallzeit auf $1969\frac{2900360}{6250000}$ Thlr. angewachsen, so fragt sichs: wie viel Jahre solches gestanden?

Nach §. 329 werden die Glieder der Progression, oder hier die Jahre, gefunden, wann von dem Logarithmus des lezten Gliedes der Logarithmus des ersten Gliedes subtrahirt, der Rest durch den

den Logarihmus des Verhältnisses dividirt und zum Quotienten 1 addirt wird, davon die Formel ist:

$$\frac{Lam^{n-1} - La}{Lm} + 1$$

Weil aber am^{n-1} nach dem gegenwärtigen Wehrt die angeführten Tabellen (§. 464) überschreitet, so muß man sich mit der Regel begnügen, welche §. 330 gegeben worden.

Zu dem Ende dividirt man erstlich das lezte Glied, als das angewachsene Capital, durch das erste Glied, und siehet alsdann zu, wie vielmahl der Quotient durch das Verhältnis oder pro Cento dividirt werden könne, indem dieses, nebst dem lezten Glied, die Jahre anzeiget, also:

Das angewachsene Capital ist: $1969\frac{2900360}{6250000}$, wird einerleinahmig resolvirt.

Wird dividirt mit $\frac{1560)}{1}$ $\frac{12309150360}{6250000}$ | $\frac{7890481}{6250000}$

$\frac{53)}{50)}$ $\frac{7890481}{6250000}$ | $\frac{148877}{125000}$ | $\frac{2809}{2500}$ | $\frac{53}{50}$

Diese vier Glieder, nebst dem ersten Glied, zeigen fünf Jahre an, welche das Capital gestanden.

§. 343. Nebst denen Interesserechnungen, welche, wie vorhin, lediglich in einer geometrischen Progression bestehen, gehören auch noch solche hieher, wann entweder jährlich, nebst den Interessen, auch noch etwas besonders zum Capital geleget, oder, da nebst den jährigen Interessen auch noch etwas vom Capital abgetragen werden soll, als:

1) Da jährlich nebst den Interessen auch noch etwas besonders zum Capital geleget wird.

Einer hatte ein Capital von 500 fl. auf fünf Jahre zu 5 pro Cento also ausgelehnet, daß nicht nur alljährlich die verfallene Interessen, sondern auch noch 50 fl. a part zum Capital geschlagen worden. Fr. Wie stark ist nach Verfliessung der fünf Jahren das Capital gewesen?

Hierzu hat man zwo Auflösungen nöthig, als: Eine auf die bestimte fünf Jahre, dabei das Capital von 500 fl. = a und die

die Interessen $\frac{1}{20} = m$, und die Andere auf vier Jahre, dabei das zuzulegende Capital von 50 fl. $= b$, und die Interessen $\frac{1}{20} = m$, genommen werden, dann von diesen 50 fl. wurden erst im zweiten Jahr Interessen gerechnet, folglichen stunden solche nur vier Jahre.

Nach §. 326 ist in Ansehung des Capitals von 500 fl. die allgemeine Formel vom lezten Glied:

$$a m^{n-1}$$

Da hier fünf Jahre bestimt sind, so hat die Progression sechs Glieder, mithin wird das Verhältnis zum fünften Grad erhaben, d. i. viermahl mit ihm selbst multiplicirt (§. 227 a^5), worauf das Product ferner mit 500 multiplicirt werden muß, als:

$\frac{21}{20}$ viermahl mit ihm selbst multiplicirt, macht:

$\frac{4084101}{3200000}$ Mit 500 multiplicirt.

$\frac{2042050500}{3200000}$ Dieser Scheinbruch wird reducirt.

32,000,00) 2 0 4 2 0(5 0 5,0 0 | $638\frac{4505}{32000}$ | $\frac{901}{6400}$ fl. das angewachsene Capit. v. 500 fl.
1 2 6(4 (5)

Die andere Auflösung, welche den jährlichen Zuschuß von 50 fl. betrift, ist:

Nach Verfliessung des ersten Jahres wurde zugeschossen 50 fl, das ist . . . . b

Diese thaten nach Verfliessung des zweiten Jahres $1\frac{1}{20}$ mahl b, oder . . . . $\frac{21}{20}b$

Hierzu kamen wieder 50 fl, welche die Formel machen . . . . $\frac{21}{20}b + b$

Diese thaten nach Verfliessung des dritten Jahres . . . . $(\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b$

Wozu wieder 50 fl. kamen, und die Formel machen . . . . . . $(\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

Diese thaten nach Verfliessung des vierten Jahres . . . . $(\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b$

Wozu abermahl 50 fl. kamen, und die Formel machen . . $(\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

Diese thaten nach Verfliessung des fünften Jahres . . $(\frac{21}{20})^4 b + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b$

Nun

Nun ist die Resolution der Formel des fünften Jahrs:

$(\frac{21}{20})^4 b$, d. i. den Bruch zum vierten Grad erhaben (§.148), und mit b, d.i. 50, multiplicirt (§.146), giebt . .	$60\frac{2481}{3200}$	. 1 . 2481 (3200)
$(\frac{21}{20})^3 b$, d.i. den Bruch zum dritten Grad erhaben, und mit b, d. i. 50, multiplicirt, komt	$52\frac{1}{2}$	. 1600 . 1600
$(\frac{21}{20})^2 b$, d.i. den Bruch zum zweiten Grad erhaben, und mit b, d. i. 50, multiplicirt, giebt	$55\frac{1}{8}$	. 400 . 400
$(\frac{21}{20})\ b$, d. i. den Bruch mit b, d. i. 50, multiplicirt, komt	$57\frac{141}{160}$	. 20 . 2820
	$226\frac{901}{3200}$	3200)7301|2 64 $\frac{901}{3200}$
Hierzu komt das vorhin erhaltene Capit.	$638\frac{901}{6400}$	
	$864\frac{2703}{6400}$ fl.	

Die Probe kan nach der Regel de Tri also gemacht werden:

fl. fl. fl.
100 — 105 — 500 ?
525 fl. Capital u. Interesse nach dem ersten Jahr.
+ 50
575 fl.

100 — 105 — 575 ?
$603\frac{15}{20}$ | $\frac{3}{4}$ fl. nach dem zweiten Jahr.
+ 50
$653\frac{3}{4}$

100 — 105 — $653\frac{3}{4}$?
$686\frac{7}{16}$ fl. nach dem dritten Jahr.
+ 50
$736\frac{7}{16}$

100 — 105 — $736\frac{7}{16}$?
$773\frac{83}{320}$ fl. nach dem vierten Jahr.
+ 50
$823\frac{83}{320}$

100 — 105 — $823\frac{83}{320}$?
$864\frac{2703}{6400}$ fl. nach dem fünften Jahr.

2) Da nebst den Interessen jährlich ein Gewisses vom Capital abgetragen wird.

Wann ein Capital von 34481 fl. auf vier Jahre zu 5 pro Cento Interessen ausgelehnet wäre, und man solte dasselbige also wieder beziehen, daß jedes Jahr vom Capital und Interessen, zusammen genommen, gleich viel bezahlet würde, so fragt sichs: Wie viel jedes Jahr bezahlet werden müsse?

Oder, welches gleiche Auflösung giebt:

Einer solte 34481 fl. baar bezahlen: er wurde aber mit seinem Gläubiger einig, daß solches in den nächsten vier aufeinander folgenden Jahren also geschehen solte, daß jedes Jahr vom Capital und Interessen, zusammen genommen, gleich viel abgetragen würde; Fr. Wie viel hatte solches jedes Jahr betragen?

Wann man bei dergleichen Exempeln das Verhältnis zu demjenigen Grad erhebet, als Jahre weniger 1 gegeben sind, und die Summe solcher Progression in das gegebene Capital dividirt, so zeiget der Quotient, wie viel nach Verfliessung des ersten Jahres vom Capital abgetragen werden müsse, worauf sich alsdann das Uebrige von selbsten ergiebt.

Zu dem Ende wird hier $\frac{21}{20}$ zu dem dritten Grad erhaben, d. i. zweimahl mit sich selbst multiplicirt, so erhält man $\frac{9261}{8000}$; dann $\frac{21}{20} \times \frac{21}{20} = \frac{441}{400} \times \frac{21}{20} = \frac{9261}{8000}$, davon die Summe $\frac{34481}{8000}$ ist.

Mit dieser Summe wird das gegebene Capital dividirt, so zeiget der Quotient, wie gedacht, an, wie viel das erste Jahr vom Capital abgetragen werden müsse.

$\frac{34481}{8000}$ umgew. $\frac{8000}{34481}$ $\frac{34481}{1}$ 34481) 275848000 | 8000 fl.
275848

müssen das erste Jahr vom Capital abgetragen werden.

Hierzu kommen die sämtliche Interessen für das erste Jahr, welche also berechnet werden:

fl.	fl.	fl.
100 —	5 —	34481 ?
20	1	$1724\frac{1}{20}$ fl.
		8000
		$9724\frac{1}{20}$ fl. wird jedes Jahr, Capital und Interessen zusammen genommen, bezahlt.

Wil

Wil man aber wissen, wie viel jedes Jahr der Abtrag vom Capital und der Zins mache, so verfähret man also:

1) Wird zu dem erhaltenen ersten Abtrag vom Capital, wie vorhin zu 8000 fl, der sämtliche Zins addirt, so hat man Capital und Interessen des ersten Jahres.

2) Addirt man die Interessen vom ersten Abtrag des Capitals zu sothanem Abtrag, so zeiget die Summe den zweiten Abtrag vom Capital.

3) Werden zu diesem zweiten Abtrag vom Capital die Interessen vom übrigen Capital gethan, so hat man die Zahlung von Capital und Interessen des zweiten Jahres u. s. f. also:

1ster Abtr. v. Cap. 8000 fl.	Hierzu die sämtliche Interessen, macht	$9724\frac{1}{20}$
	Die Interessen von 8000 fl. sind 400 fl. mithin	
2ter Abtr. v. Cap. 8400 fl.	Hierzu die Interessen vom übrigen Capital 26481, das sind $1324\frac{1}{20}$ fl. macht . . .	$9724\frac{1}{20}$
	Die Interessen von 8400 sind 420, mithin	
3ter Abtr. v. Cap. 8820 fl.	Hierzu die Interessen vom übrigen Cap. 18081, d. s. $904\frac{1}{20}$ fl. Interessen, macht . .	$9724\frac{1}{20}$
	Die Interessen von 8820 sind 441, mithin	
4ter Abtr. v. Cap. 9261 fl.	Hierzu die Interessen vom übrigen Capital 8261, d. s. $463\frac{1}{20}$ Interessen, macht . .	$9724\frac{1}{20}$
Probe: 34481 fl.		

Eine allgemeine Auflösung hiervon komt bei den Gleichungen vor (§. 554).

Von den
Poliigonalzahlen
und
ihren Wurzeln.

§. 344.

Ueberhaupt wird eine jede Summe zweier, dreier und mehrerer Glieder einer arithmetischen Progression (§. 312), welche sich NB. von 1 anfängt, eine Poliigonal- oder ekigte- auch figurirte Zahl genennet, weil ihre Einten in einer ekigten geometrischen Figur vorgestellet werden können.

§. 345. Insonderheit erhält eine jede Poliigonalzahl nach der geometrischen Figur, welche durch ihre Einten formiret werden kan, wiederum ihren besondern Nahmen, als: Trigonal- Tetragonal- Pentagonalzahl u. s. f.

§. 346. Diese aber werden abermahl in einfache oder gemeine und in Centralpoliigonalzahlen getheilet.

Derowegen folget:

I. Von den einfachen oder gemeinen Poliigonalzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 347. Wann bei einer arithmetischen Progression die Differenz der Glieder 1 ist (§. 312), so kan mit der Summe zweier, dreier und mehrerer Glieder allezeit ein Dreiek formiret werden, und heisset alsdann eine solche Summe: eine gemeine Trigonal- oder Triangularzahl (§. 345).

Z. E. 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 u. s. f.

Werden nun von diesen Zahlen oder Gliedern etliche addiret, so erhält man Trigonalzahlen, als:

$1+2=3.\quad 1+2+3=6.\quad 1+2+3+4=10.$
$1+2+3+4+5=15$ u. s. f.

welche nach ihren Einten dreiekigte geometrische Figuren machen (§. 344), sonsten aber auch auf viele andere Fälle angewendet werden können.

Nota. Hieraus erhellet, daß, so viel Glieder der Progression addiret werden, so viele Einten auf eine Seite kommen müssen, und daß allemahl der Eken zwo mehr sind, als die Differenz ist.

Die aufsteigende Ordnung der gemeinen Trigonalzahlen ist also: 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. 45. 55. 66. 78 u. s. f. welches man inskünftige wissen muß.

§. 348. **Sol aus einer gegebenen Seite, welche auch die Wurzel heisset, die Zahl des Dreieks gesuchet werden, so wird sothane Seite mit ihr selbst multiplicirt, zum Product dieselbige addirt, und die Summe durch 2 dividirt.**

Z. E. Die Seite sei: 5
5
25
+ 5
2) 30
15 ist die Zahl des Dreieks.

Nennet man die Seite n, so ist die Buchstabe- oder allgemeine Bezeichnung also:

$$\frac{nn+n}{2} \text{ oder: } \frac{n^2+n}{2}$$

Nimt man willkührlich $n=8$, so ist $n^2=64+8=72$ und die Helfte 36, als die Zahl des Dreieks.

§. 349. **Ist aus einer Zahl eines Dreieks eine Seite oder die Wurzel zu suchen** (§. 348), so wird dieselbige mit 2 multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel gezogen, welche alsdann die Trigonalwurzel ist, wobei der Rest nicht geachtet wird.

Z. E. Die Zahl des Dreieks sei: 78.

```
      78
      ×2
    ----
    1,56 | 12 ist die Wurzel, oder eine Seite.
    1..  |
    ----
 20) 56
     40
    ----
     16
     —4
    ----
     12 Wird nicht geachtet.
```

Nota. Eine allgemeine Regel zu Ausziehung der Wurzeln aus einer jeden gemeinen Poliigonalzahl (§. 346) kan erst bei den Gleichungen gegeben werden (§. 577 u. f.).

Wann 20 Pflanzen auf eine Seite gesezet werden sollen, wie viel werden zu einem Dreiek erfordert? Antw. 210.

Mit 136 Steinen von gleicher Grösse kan man ein Dreiek formiren, wie viel kommen auf eine Seite? Antw. 16.

§. 350. **Ist bei einer arithmetischen Progression die Differenz der Glieder 2, so kan man mit der Summe zweier, dreier und mehrerer Glieder allezeit ein Vierek formiren, und heisset deswegen sothane Summe eine Tetragonalzahl, welche mit der Quadratzahl** (§. 158) **einerlei ist.**

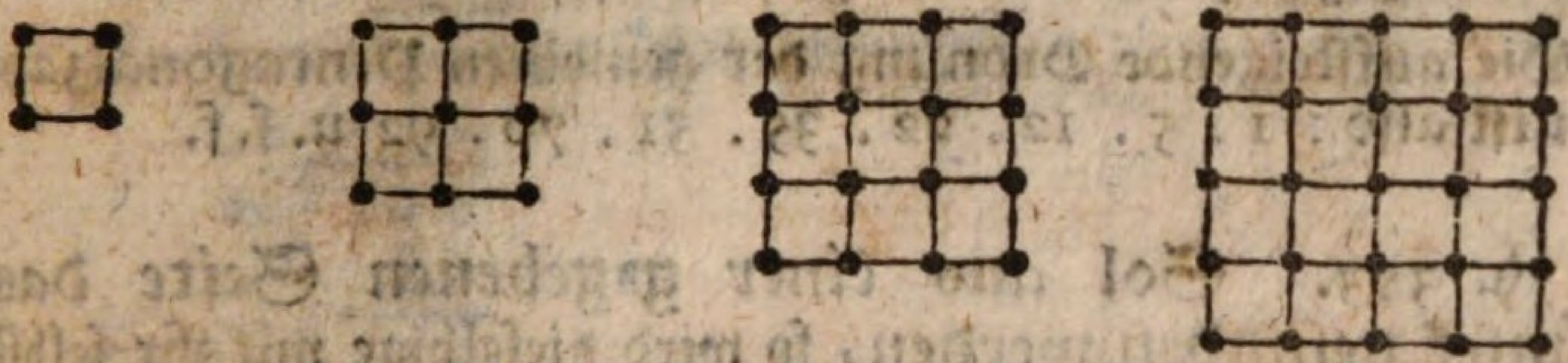
Z. E.

Z. E. 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19 . u. s. f.

Werden nun von diesen Gliedern verschiedene addirt, so erhält man Tetragonalzahlen, als:

$1+3+5=9 . 1+3+5+7=16 . 1+3+5+7+9=25$

welche nach ihren Einten vierekigte geometrische Figuren machen, sonsten aber auch auf andere Dinge angewendet werden können.



Die aufsteigende Ordnung der gemeinen Tetragonalzahlen ist also: 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 . 81 u. s. f.

§. 351. Sol aus einer gegebenen Seite das Vierek gesuchet werden, so wird dieselbige nur mit ihr selbst multipliciret, d. i. quadriret, und wann aus dem gegebenen Vierek die Seite gesuchet werden sol, so wird aus demselben die Quadratwurzel gezogen, wie solches aus §. 158 u. f. bereits bekant ist.

Nach gegenwärtigen Formeln ist hier die quadratische Bezeichnung:

$$\frac{2n^2+on}{2},$$

d. i. das doppelte Quadrat von n, und on (d. i. nichts), mit 2 dividirt; sonsten aber ist sie, wie bekant, nur: n^2 (§. 178).

§. 352. Ist bei einer arithmetischen Progression die Differenz der Glieder 3, so giebt die Summe etlicher Glieder allezeit ein Fünfek, und wird deswegen eine Pentagonalzahl genennet.

Z. E. 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 u. s. f.

Werden nun von diesen Gliedern addirt, so erhält man Pentagonalzahlen, als:

1 + 4 + 7 = 12 . 1 + 4 + 7 + 10 = 22 u. s. f.

welche nach ihren Einten fünfekigte Figuren, wiewohl mit keiner Accuratesse, ausmachen. Dahero man sich auch bei diesen und folgenden gemeinen ekigten Zahlen nicht sowohl mit der Figur, als mit der Zahl selbst, abgeben wird.

Die aufsteigende Ordnung der gemeinen Pentagonalzahlen ist also: 1 . 5 . 12 . 22 . 35 . 51 . 70 . 92 u. s. f.

§. 353. Sol aus einer gegebenen Seite das Fünfek gefunden werden, so wird dieselbige mit ihr selbst multiplicirt, das Product dreimahl genommen, d. i. mit der Differenz der Glieder multiplicirt, von der Summe wiederum eine Seite subtrahirt, und der Rest durch 2 dividirt.

Z. E. Die Seite sei 4

4
16 (3 Differenz der Glieder.
48
— 4
2) 44
22 ist das Fünfek.

Nennet man die Seite n, so ist die Buchstabebezeichnung also:

$$\frac{3n^2 - n}{2}$$

§. 354. Ist aus einem gegebenen Fünfek eine Seite zu suchen, so wird, wie bei allen übrigen gemeinen Poliigonalzahlen (§. 346), die Zahl erst duplirt, alsdann mit der Zahl, so ihr Nahme, d. i. hier 5, andeutet, multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel gezogen, der Rest aber nicht geachtet: worauf man diese erhaltene Wurzel

Wurzel mit der Zahl, so ihr Nahme, wie gedacht, zu erkennen giebt, dividirt, den Quotienten abermahl mit der Differenz, welche hier 3 ist, dividirt, beide Quotienten addirt, und den Bruch für ein Ganzes nimt.

Z. E. Es sei die Zahl des Fünfeks, wie vorhin: 22.

```
        22(2
        ----
        44(5 Die Eken.
       2,20 | 14 Quadratwurzel.
       1..
      -----
   20) 120
        80
      -----
        40
        16
      -----
        24 Rest, so nicht geachtet wird.
```

Mit der erhaltenen Quadratwurzel wird nun also verfahren:

```
  Die Eken:    5) 14
Die Differenz: 3)  2 4/5
                   14/15; dann 2 4/5 durch 3 dividirt, giebt: 14/15.
            Summe: 3 11/15, oder 4, als die Seite oder Wurzel.
```

Wann eine Seite oder die Wurzel einer gemeinen Pentagonalzahl 11 sein sol, wie groß muß die Zahl selbst sein? Antw. 176.

Daß 176 eine Pentagonalzahl sei, deren eine Seite 11 habe, solches wird nach vorheriger Anweisung bewiesen, als:

```
   176(2                  Eken: 5)41
   -----                  Differ. 3) 8 1/5 Quotient der Eken.
   352(5 Die Eken.                   2 11/15 Quot. der Differ.
 17,60|41 Quadr. Wurz.    Summe: 10 14/15 Mithin ist die
 16..                                      Wurzel 11.
 -----
80)160
    80
 -----
    80
     1
 -----
    79 Wird nicht geachtet.
```

Eine Pentagonalzahl ist 287, welches ist die Wurzel derselben? Antw. 14.

Daß 14 die Wurzel von der Pentagonalzahl 287 sei, solches wird nach §. 353 also bewiesen:

```
   14 Wurzel.
   14
   ---
   56
  14
  ----
  196 (3 Die Differenz der Glieder.
  ----
  588
 — 14
 ----
2) 574
 ----
  287 Pentagonalzahl.
```

§. 355. Ist bei einer arithmetischen Progression die Differenz der Glieder 4, so kan man mit der Summe etlicher Glieder allezeit ein Sechsek formiren, und heisset deswegen die Summe eine Hexagonalzahl.

Z. E. 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . 21 . 25 . 29 . 33 u. s. f.

Werden nun von diesen Gliedern addirt, so erhält man Hexagonalzahlen, als:

$$1 + 5 + 9 = 15. \quad 1 + 5 + 9 + 13 = 28.$$

welche nach ihren Einten sechsekigte geometrische Figuren machen, sonsten aber auch auf andere Fälle angewendet werden können.

Die aufsteigende Ordnung der gemeinen Hexagonalzahlen ist also: 1 . 6 . 15 . 28 . 45 . 66 . 91 . 120 . 153 u. s. f.

§. 356. Sol aus einer gegebenen Seite das Sechsek gesuchet werden, so wird dieselbige quadrirt, das Quadrat mit 4, d. i. der Differenz, multiplicirt, vom Product die doppelte Seite subtrahirt, und der Rest mit 2 dividirt.

Z. E. Die Seite sei: 4
4
16 (4 Differenz der Glieder.
64
— 8 Doppelte Seite.
2) 56
28 Die Zahl des Sechseks.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist:

$$\frac{4n^2 - 2n}{2}$$

Nota. Hierbei ist zu merken, daß alle sechsekigte Zahlen auch zugleich dreiekigte Zahlen sind, also, daß ein Sechsek zwei Dreieke giebt.

§. 357. Ist bei einem gegebenen Sechsek eine Seite oder die Wurzel zu suchen, so geschiehet solches eben, wie §. 354 gelehret worden.

Z.E. Das Sechsek sei: 91 (2
182 (6 Die Eken.
10,92 | 33 Quadr. wurzel.
9 . .
60) 192
180
12
— 9
3 Wird nicht geachtet.

Eken: 6) 33
Diff. 4) $5\frac{1}{2}$ Quotient.
$1\frac{3}{8}$ Quotient.
Summe: $6\frac{7}{8}$, mithin ist die Wurzel 7.

Wann bei einem Sechsek eine Seite 11 ist, was ist die Zahl desselben? Antw. 231.

Daß 231 eine Hexagonalzahl sei, deren eine Seite 11 habe, solches wird, wie vorhin, also bewiesen:

```
      231(2
      462(6 Die Eken.
    2772|52 Quadratwurzel.
     25..
100) 272
     200
      72
       4
      68 Wird nicht geachtet.
```

```
          Eken: 6) 52
Differenz: 4)  8⅔ Quotient.
               2⅙ Quotient.
  Summe :     10⅚, oder 11 ist
                    eine Seite.
```

Aus wie viel Gliedern bestehet eine arithmetische Progression, deren Unterschied 4 und die Summe 378 ist? Antw. Aus 14 Gliedern; dann wann, wie vorhin, aus der Summe eine Seite gesuchet wird, so erhält man $13\frac{23}{24}$, d. i. 14, und aus so viel Gliedern bestehet die Progression (s. §. 347 Not.).

Daß 14 die Glieder, eine Seite, oder die Wurzel von der Hexagonalzahl 378 sei, solches wird wie vorhin bewiesen:

```
   14
   14
   56
  14
  196
    4 Differenz der Glieder.
  784
 — 28 Doppelte Wurzel oder Seite.
2)756
  378 Die Hexagonalzahl.
```

§. 358. Ist bei einer arithmetischen Progression die Differenz der Glieder 5, so kan mit der Summe etlicher Glieder allezeit ein Siebenek formiret werden, weswegen sothane Summe eine Heptagonalzahl heisset.

Z. E. 1. 6. 11. 16. 21. 26 u. s. f.

Werden von diesen Gliedern addirt, so giebt es Heptagonalzahlen, als:

$$1 + 6 + 11 = 18. \quad 1 + 6 + 11 + 16 = 34,$$

welche nach ihren Einten siebenekigte geometrische Figuren machen, sonsten aber auch auf andere Fälle gerichtet werden können.

Die aufsteigende Ordnung der gemeinen Heptagonalzahlen ist also: 1. 7. 18. 34. 55. 81 u. s. f.

§. 359. Sol aus einer gegebenen Seite das Siebenek gefunden werden, so wird dieselbige mit ihr selbst multiplicirt, das Product mit der Differenz, welche hier 5 ist, vervielfältiget, die dreifache Seite subtrahirt, und der Rest mit 2 dividirt.

Z. E. Die Seite sei: 3		oder: Die Seite sei: 4	
3		4	
9	(5 Differ. der Glieder.	16	5)
45		80	
— 9	Dreifache Seite.	— 12	Dreif. S.
2) 36		2) 68	
18	Die Zahl des Siebeneks.	34	Siebenek.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist:

$$\frac{5n^2 - 3n}{2}$$

§. 360. Ist aus einem gegebenen Siebenek eine Seite zu suchen, so geschiehet es nach denen vorhin gezeigten Regeln:

Z. E. Die Zahl des Siebeneks sei: 81

81 (2	
162 (7 Die Eken.	Eken: 7) 33
1 1,3 4 | 33 Quadratw.	Differ. 5) $4\frac{5}{7}$. 5 . 25
9 . .	Quot. $\frac{33}{35}$. 1 . 33
60) 2 3 4	4 $\frac{58}{35}$ Red. $1\frac{23}{35}$
1 8 0	$1\frac{23}{35}$
5 4	$5\frac{23}{35}$
— 9	mithin ist die eine Seite 6.
4 5 Nicht zu achten.	

Wann

Wann die Heptagonalwurzel 9 ist, wie viel ist die Zahl? Antw. 189.

Daß 189 eine Heptagonalzahl und deren Wurzel 9 sei, wird bewiesen:

```
     9
     9
    ──
    81 (5 Differenz der Glieder.
   ───
   405
  — 27 Dreifache Seite.
   ───
 2) 378
   ───
   189 Die Zahl.
```

Die siebenekigte Zahl ist 469, welches ist eine Seite? Antw. 14.

Daß 14 die Wurzel von 469 sei, wird also gezeiget:

```
     4 6 9 (2
    ──────
     9 3 8 (7 Die Eken.
    ──────
   6 5,6 6 | 81 Quadratwurzel.     Eken : 7) 81
   6 4 . . |                       Differ. 6) 11 4/7
   ───────                                    1 32/42
160) 1 6 6                         Summe : 13 21/42, folglichen ist
     1 6 0                                 die Wurzel 14.
   ───────
         6
       — 1
   ───────
         5 für Nichts zu achten.
```

Diese einfache Poliigonalzahlen (§. 346) können nun nach Belieben weiter fortgesezet und nach denen gegebenen Regeln behandelt werden; dann nach den Buchstaben wird ferner

Das 8 Ek,	genant:	Octagonalzahl,	und bezeichnet:	$\frac{6n^2 - 4n}{2}$
„ 9 Ek,		Enneagonalzahl,		$\frac{7n^2 - 5n}{2}$
„ 10 Ek,		Decagonalzahl,		$\frac{8n^2 - 6n}{2}$

Das

Das 11 Ek,		Hendecagonalzahl,		$\frac{9n^2 - 7n}{2}$
= 12 Ek,		Dodecagonalzahl,		$\frac{10n^2 - 8n}{2}$
= 13 Ek,		Tridecagonalzahl,		$\frac{11n^2 - 9n}{2}$
= 14 Ek,		Tetradecagonalzahl,		$\frac{12n^2 - 10n}{2}$
= 15 Ek,		Pentadecagonalzahl,		$\frac{13n^2 - 11n}{2}$
= 16 Ek,		Hexadecagonalzahl,		$\frac{14n^2 - 12n}{2}$
= 17 Ek,		Heptadecagonalzahl,		$\frac{15n^2 - 13n}{2}$
= 18 Ek,	genennt:	Octadecagonalzahl,	und bezeichnet:	$\frac{16n^2 - 14n}{2}$
= 19 Ek,		Enneadecagonalzahl,		$\frac{17n^2 - 15n}{2}$
= 20 Ek,		Icosigonalzahl,		$\frac{18n^2 - 16n}{2}$
= 30 Ek,		Triacontagonalzahl,		$\frac{28n^2 - 26n}{2}$
= 40 Ek,		Tetracontagonalzahl,		$\frac{38n^2 - 36n}{2}$
= 50 Ek,		Pentacontagonalzahl,		$\frac{48n^2 - 46n}{2}$
= 60 Ek,		Hexacontagonalzahl,		$\frac{58n^2 - 56n}{2}$
= 70 Ek,		Heptacontagonalzahl,		$\frac{68n^2 - 66n}{2}$

Das 80 Ek,	genant:	Octacontagonalzahl,	und bezeichnet: $\frac{78n^2 - 76n}{2}$
— 90 Ek,		Enneacontagonalzahl,	$\frac{88n^2 - 86n}{2}$
— 100 Ek,		Hecatogonalzahl,	$\frac{98n^2 - 96n}{2}$
— 1000 Ek,		Chiliogonalzahl,	$\frac{998n^2 - 996n}{2}$
— 10000 Ek,		Miriogonalzahl,	$\frac{9998n^2 - 9996n}{2}$

wobei ein jeder von selbsten einsehen wird, wie die Zahlen zwischen 20 und 30, zwischen 30 und 40 u. s. f. mit Buchstaben formiret werden müssen.

§. 361. Nach der bisherigen Anweisung kan nun aus einer jeden gegebenen Seite die einfache Poliigonalzahl, und hinwiederum aus einer jeden einfachen Poliigonalzahl die Seite gefunden werden, wann nur dabei gemerket wird: daß allezeit 2 Eken mehr sind, als die Differenz der arithmetischen Progreßion ist (§. 347 Not.), womit das Quadrat der gegebenen Seite multiplicirt wird (§. 353), und diese Differenz wiederum um 2 mehr ist, als Seiten subtrahirt werden (§. 353. 356. 359), ausgenommen bei dem Dreiek, da man eine Seite addirt (§. 248), und bei dem Vierek, welches nach §. 158 behandelt wird.

Z. E. Es würde 7 zu einer Seite gegeben, und dabei gefragt: wie groß die Zahl sein müsse, um eine 21 ekigte Figur damit formiren zu können? so wäre die Bezeichnung also:

$$\frac{19n^2 - 17n}{2}$$

Dann weil die Figur 21 Eken haben sol, so muß die Differenz 19 sein, indeme der Eken zwei mehr sein müssen (§. 347); und

und weil ferner die Differenz wieder um zwei mehr sein muß, als Seiten subtrahirt werden, so folget, daß diese 17 seien.

Resolution: 7 Seite.

```
  7
 ---
 49  (19 Differenz der Glieder.
441
 ---
931
—119 (17fache Seite.
 ---
2) 812
 ---
406 ist die 21 ekigte Zahl.
```

Aus dieser Zahl wird nun die Seite wiederum also gefunden:

```
     406 (2
     ---
     812 (21 die Eken.
    1624
   ------
   1,70,52 | 130 Quadratw.
   1 . . . .
   ------
200) 7052
     6000
     ----
     1052
      900
     ----
260)  152 Wird für nichts
          geachtet.
```

Eken: 21) 130 (399)

Differ. 19) $6\frac{4}{21}$. 19 . 76

$\frac{130}{399}$. 1 . 130

$6\frac{206}{399}$ $\frac{206}{399}$

Also ist die Seite 7.

Item: Es würde zu einer Seite 7 gegeben, und gefragt, wie groß die Zahl sein müsse, um eine 1000 ekigte Figur damit formiren zu können, so wäre die Bezeichnung nach §. 361 also:

$$\frac{998\, n^2 - 996\, n}{2}$$

Resolution: 7 Seite.
7
49
998 Differenz der Glieder.
49
8982
3992
48902
— 6972 . 996fache Seite.
2) 41930
20965 ist die Zahl.

996
7
6972

Daß dieses die Zahl sei, beweiset der Rükweeg, dabei die Seite oder Wurzel wie vorhin wieder gesuchet wird, als:

20965 (2
41930 (1000 die Eken.
41,93,00,00 | 6475 Quadratwurzel, welche nun gehörig dividirt wird:
36. . . . . .
12000) 5930000
4800000
1130000
— 160000
12800) 970000
896000
74000
— 4900
12940) 69100
64700
— 4400
25
4375 Wird für nichts geachtet.

Eken: 1000) 6475 | $6\frac{475}{1000}$, diesen Quotienten mit der Differenz 998 divid. komt: $\frac{6475}{998000}$

Werden beide Quotienten addirt, so ist die Summe: $6\frac{480525}{998000}$, den Bruch für 1 genommen (§. 354), so ist eine Seite, oder die Wurzel; 7.

§. 362.

§. 362. Weil allemahl eine Seite einer ekigten Zahl aus so viel Einten bestehet, als Glieder der Progression addirt sind (§. 347 Not.), so kan eine ekigte Zahl auch nach den Gliedern gefunden werden, wann man nemlich erstlich nach §. 316 das lezte Glied, und alsdann nach §. 321 die Summe, mithin die Poliigonalzahl, suchet.

Z. E. Es würden 12 Glieder gegeben, um die Icosigonalzahl, d. i. die 20 ekigte Zahl, daraus zu suchen, so wird also procediret;

```
 12 Die Anzahl der Glieder.            1 Das erste Glied.
− 1 Das erste Glied.                 199 Das lezte Glied.
 ──                                  ───
 11                                  200
 18 Die Differenz; dann bei der        6 Die Helfte der Glieder.
 ──     20 ekigten Zahl ist die      ────
 88     Differenz 18 (§. 361).       1200 Die Icosigonalzahl.
 11
 ───
198
+ 1 Das erste Glied.
───
199 Das lezte Glied.
```

Daß dieses die 20 ekigte Zahl würklich sei, wird, wie vorhin, durch den Rükweeg oder Ausziehung der Wurzel gezeiget, da 12 auf eine Seite kommen muß.

```
     1200 Icosigonal-
        2 zahl.
     ────
     2400
       20 Die Eken.        Eken : 20) 219
     ──────                           ───   (360)
     4,80,00|219 Qua-   Differ. 18)  10 19/20 · 18 · 342
     4 . . . .  dratw.  Quotient :   219/360 · 1 . 219
400) 8000                            ─────       ───
     4000                           10 561/360 Red. 1 201/360
     ────                          + 1 201/360
     4000                          ─────────
     −100                           11 201/360, mithin ist die Wur-
     ────                                 zel oder Seite 12.
420) 3900
     3780
     ────
      120
      −81
      ───
       39 Nicht zu achten.
```

§. 363. Aus dem Vorhergehenden kan nun eine allgemeine Formel hergeleitet werden, wodurch die Summe einer jeden gemeinen Poliigonalzahl ausgedrükket wird, wann man die Zahl der Eken m, und die Zahl der Seite, wie vorhin, n nennet, also:

$$\frac{(m-2)\,n^2-(m-4)\,n}{2}$$

Das heist: Die Zahl der Eken weniger 2 mit dem Quadrat der Seite multiplicirt; alsdann hievon das Product der Eken weniger 4 und der Seite subtrahirt, und den Rest durch 2 dividirt.

Z. E. Es seien der Eken 3, und die Zahl der einen Seite 8, so wird nach dieser allgemeinen Formel die Zahl also gefunden:

$m-2$ ist $=1$ | $m-4$ ist $=-1$
n^2 ist $=64$ | n ist $=8$

64 | -8 Wird unter + subtrah. (§. 71)
$+8$
2) 72
36 Ist die Zahl des Dreieks.

Item: Man wil eine Figur von 8 Eken, d. i. eine Octagonalzahl formiren, und auf eine Seite 8 nehmen, wie groß muß die Zahl sein?

$m-2$ ist $=6$ | $m-4$ ist $=4$
n^2 ist $=64$ | n ist $=8$

384 | 32
-32
2) 352
176 ist die Zahl.

Probe: Weil der Eken allemahl zwo mehr sind, als die Differenz ist, so muß die Differenz der Progression, woraus diese Zahl entstanden, 6 sein: und weil ferner so viel Glieder derselben addirt werden müssen, als Einten auf eine Seite kommen sollen, so müssen 8 Glieder addirt werden (s. §. 347 Not.), als:

1 . 7 . 13 . 19 . 25 . 31 . 37 . 43, deren Summe 176 ist (§. 321); dann die Poliigonalzahlen müssen sich allezeit mit 1 anfangen (§. 344).

Die andere Probe ist: wann aus dieser Zahl, wie vorhin gezeiget worden, die Wurzel oder eine Seite gesuchet wird.

II. Von

II. Von den Centralpoliigonalzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 364. Wann eine gemeine Trigonalzahl (§. 347) mit 3, 4, 5 u.s.f. multiplicirt, und allezeit zum Product 1 addirt wird, so giebt es überhaupt Centralpoliigonal- oder volle Poliigonalzahlen.

§. 365. Insonderheit erhält eine jede Centralpoliigonalzahl nach der geometrischen Figur, welche durch ihre Einten formiret werden kan, und nach Masgab der Multiplication einer gemeinen Trigonalzahl (§. 347), wiederum ihren besondern Nahmen, als: Centraltrigonal- Centraltetragonal- Centralpentagonalzahl u.s.f. (§. 345).

§. 366. Centralzahlen aber heissen solche Poliigonalzahlen, weil von ihren Einten allezeit der Figur (§. 344) Eins in die Mitte komt, aus welchem man gegen die Eken der Figur gerade Linien ziehet, und dadurch eine reguläre Figur erhält.

§. 367. Sol nun eine Centraltrigonalzahl formiret werden, so wird allezeit die gemeine Trigonalzahl (§. 347) mit der Anzahl der Eken, nemlich 3, multiplicirt, und zum Product 1 addirt (§. 364), wobei zu merken ist, daß die Seite einer Centralzahl allemahl um 1 mehr ist, als die Seite einer gemeinen Trigonalzahl.

Z. E. Wie groß muß eine Centraltrigonalzahl sein, wann auf einer Seite 6 genommen werden sollen?

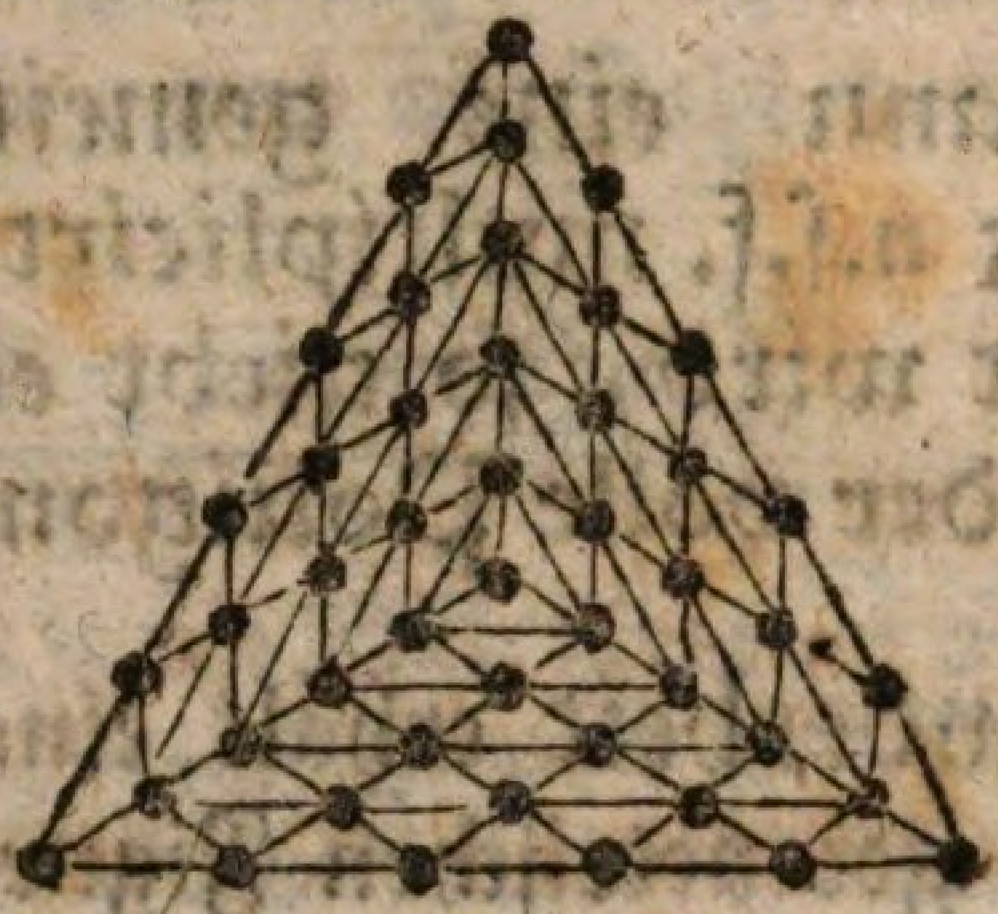
Da die Seite aus 6 bestehen sol, so muß, wie gesagt, die Seite der gemeinen Trigonalzahl aus 5 bestehen; und eben aus so viel Gliedern bestehet auch die Progression (§. 347), als:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Gemeine Trigonalzahl.
3 Anzahl der Eken der Centralzahl.

45
+ 1

46 ist die Centraltrigonalzahl.

Mit dieser Zahl kan folgende geometrische Figur bezeichnet, sonsten aber auch auf viele andere Fälle angewendet werden:



§. 368. **Es ist aber nicht nöthig, die Glieder einer arithmetischen Progression aufzusezen, sondern man suchet nur nach §. 348 aus der Anzahl derselben die gemeine Trigonalzahl.**

Z. E. Man wolte die Centraltrigonalzahl wissen, deren Figur auf einer Seite 9 habe, so müste die gemeine Trigonalzahl 8 haben, deren Zahl also gefunden wird:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ \hline 64 \\ +8 \\ \hline 2)\ 72 \\ \hline 36 \\ 3 \\ \hline 108 \\ +1 \\ \hline 109 \end{array}$$

36 Ist die gemeine Trigonalzahl.
3 Eken der Centralzahl.
109 Centraltrigonalzahl.

Nennet man die Seite n, so ist die Buchstabebezeichnung:

$$\frac{3n^2 - 3n}{2} + 1$$

dann

dann wann z. E. $n = 8$, so ist die Resolution also:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ \hline 64 \\ 3 \\ \hline 192 \\ -24 \\ \hline 2)\ 168 \end{array}$$

— 24; dann 3n ist = 24

2) 168 | 84 + 1, d. i. 85, als die Centraltrigonalzahl.

Die aufsteigende Ordnung der Centraltrigonalzahlen ist von 1 an: 1 . 4 . 10 . 19 . 31 . 46 . 64 . 85 u. s. f. dann wann eine jede gemeine Trigonalzahl (§. 347) von 1 an mit 3 multiplicirt, und zum Product 1 addirt wird, so kommen diese Centraltrigonalzahlen.

§. 369. **Sol aus einer Centraltrigonalzahl die Wurzel gezogen oder eine Seite gesuchet werden**, so wird die Zahl duplirt, das Product mit den Eken der Zahl multiplicirt, aus dem Product die Quadratwurzel gezogen, der Rest aber nicht geachtet, und dieselbige mit den Eken wieder dividirt, wobei der Bruch allezeit für ein Ganzes genommen wird (§. 354).

Z. E. Die Centraltrigonalzahl sei:

85 (2
170 (3 Eken.
5,10 | 22 Quadratwurzel. Eken: 3) 22
4 . .
40) 110
80
30
4
26 Wird nicht geachtet.

$7\frac{1}{3}$ Also ist 8 die eine Seite.

Nota. Eine allgemeine Regel zu Ausziehung der Wurzeln aus einer jeden Centralpoliigonalzahl kan erst bei der Algebra gegeben werden (§. 584 u. f.).

Wann die Seite oder Wurzel einer Centraltrigonalzahl 15 ist, wie groß ist dieselbige? Antw. 316.

Probe:
```
      316(2
      632(3 Eken.
    18,96|43 Quadrat-    Eken: 3) 4 3|14⅓, oder 15,
    1600     wurzel.              1(1   die Seite.
80)  296
     240
      56
       9
      47 Wird nicht geachtet.
```

Eine Centraltrigonalzahl ist 235, welches ist die Wurzel? Antw. 13.

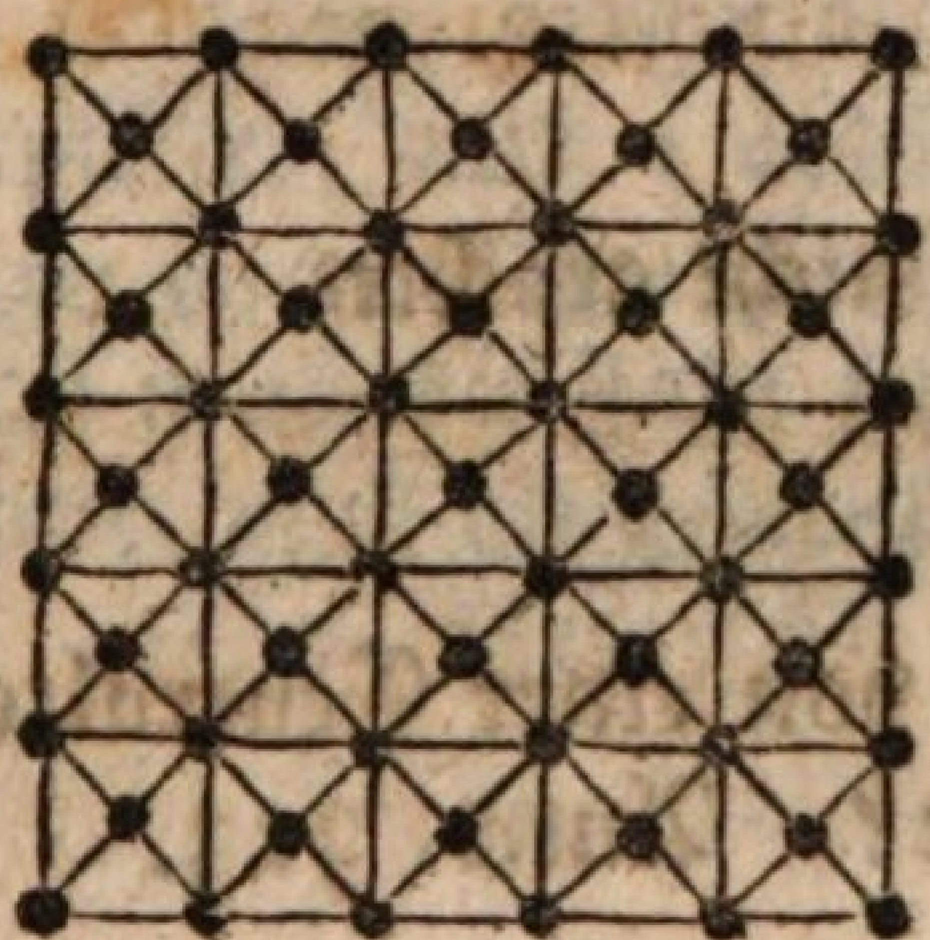
Probe:
```
     12 Glieder muß die gemeine Trigonalzahl haben
     12    (§. 367).
     24
     12
    144
   + 12
2)  156
     78 Ist die gemeine Trigonalzahl (§. 368).
      3 Eken der Centralzahl.
    234
    + 1
    235 Ist die Centraltrigonalzahl.
```

§. 370. Ist eine Centraltetragonalzahl zu formiren, so wird die gemeine Trigonalzahl mit 4 multiplicirt, und zum Product 1 addirt (§. 365).

Z. E. Wie groß muß die Centraltetragonalzahl sein, wann man auf eine Seite 6 nehmen wil?

5	Glieder muß die gemeine Trigonalzahl haben.
5	
25	
+5	
2) 30	
15	Die gemeine Trigonalzahl.
4	Eken der Centralzahl.
60	
+1	
61	Ist die Centraltetragonalzahl.

Mit dieser Zahl kan folgende geometrische Figur bezeichnet, sonsten aber auch auf viele andere Fälle angewendet werden:



Die Bezeichnung mit Buchstaben ist nach gegenwärtiger Ordnung:

$$\frac{4n^2 - 4n}{2} + 1$$

dann wann $n = 6$, so ist $4n^2 = 144$
$-4n = -24$
2) 120
60
+1
61

Die aufsteigende Ordnung der Centraltetragonalzahlen ist von 1 an: 1. 5. 13. 25. 41. 61. 85. 113 u. s. f. dann wann eine jede gemeine Trigonalzahl (§. 347) von 1 an mit 4 multiplicirt, und zum Product 1 addirt wird, so kommen diese Centraltetragonalzahlen.

§. 371. Die Ausziehung der Wurzel geschiehet wie vorhin (§. 369).

Z. E. Wann die Centraltetragonalzahl 61 ist, welches ist die Wurzel?

```
     6 1
       2
   -----
   1 2 2
       4 Eken.
   -----
   4,8 8 | 22 Quadrat-       Eken: 4) 22 | 5 1/2, oder 6, ist
   4 . .      wurzel.                 --           die Wurzel.
   -----                               2
40)  8 8
     8 0
   -----
       8
       4
   -----
       4 Wird nicht geachtet.
```

Wann eine Seite von einer Centraltetragonalzahl 13 ist, wie groß ist dieselbige? Antw. 313.

```
Probe:   12 Glieder muß die gemeine Trigonalzahl haben.
         12
       ----
         24
        12
       ----
        144
      + 12
       ----
   2)   156
       ----
         78 Ist die gemeine Trigonalzahl.
          4 Eken der Centralzahl.
       ----
        312
       +  1
       ----
        313 Die Centraltetragonalzahl.
```

Eine Centraltetragonalzahl ist 421, wie viel ist eine Seite? Antw. 15.

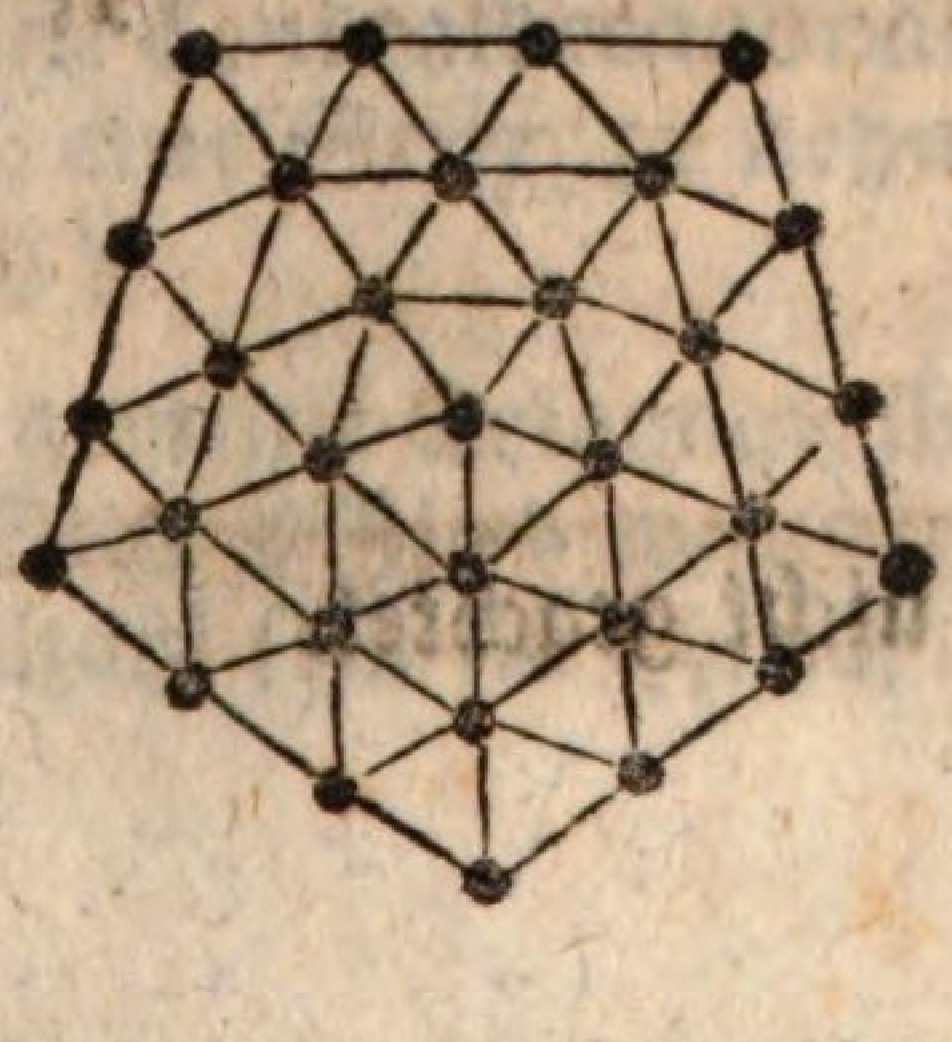
Probe:
```
         421
           2
        ----
         842
           4 Eken.
        ----
        33,68 | 58 Quadrat-      Eken: 4) 58
        25..       wurzel.            ------
        ----                          14½, d. i. 15, die
  100)   868                               Wurzel.
         800
        ----
          68
          64
        ----
           4 Wird nicht geachtet.
```

§. 372. Eine Centralpentagonalzahl wird gefunden, wann die gemeine Trigonalzahl mit den Eken, nemlich mit 5, multiplicirt, und 1 addirt wird (§. 364).

Z. E. Wann man zu einer Seite einer Centralpentagonalzahl 4 nimt, wie groß muß die Zahl sein?

```
       3 Glieder muß die gemeine Trigonalzahl haben.
       3
      --
       9
      +3
      --
  2)  12
      --
       6 Ist die gemeine Trigonalzahl.
       5 Eken der Centralzahl.
      --
      30
      +1
      --
      31 Die Centralpentagonalzahl.
```

Mit dieser Zahl kan folgende geometrische Figur bezeichnet, im übrigen aber auf viele andere Fälle angewendet werden:



Die

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist:

$$\frac{5n^2 - 5n}{2} + 1$$

dann wann $n = 4$, so ist $5n^2 = 80$

$$\begin{array}{r} -5n = -20 \\ 2)\ 60 \\ \hline 30 \\ +1 \\ \hline 31 \end{array}$$ Die Zahl.

Die aufsteigende Ordnung der Centralpentagonalzahlen von 1 an ist: 1. 6. 16. 31. 51. 76. 106 u. s. f. dann wann eine jede gemeine Trigonalzahl (§. 347) von 1 an mit 5 multiplicirt, und zum Product 1 addirt wird, so kommen diese Centralpentagonalzahlen.

§. 373. Die Wurzel oder eine Seite einer Centralpentagonalzahl wird eben wie vorhin gefunden.

Z. E. Es sei aus der Centralpentagonalzahl 31 die Wurzel zu ziehen:

```
        3 1 (2
       ------
        6 2 (5 Eken.
      --------
      3,1 0 | 17 Quadrat-      5) 17  Also ist eine Seite 4.
      1 . .     wurzel.           ---
      ------                      3 2/5
  20) 2 1 0
      1 4 0
      ------
        7 0
        4 9
      ------
        2 1 Wird nicht geachtet.
```

Die

Die Centralpentagonalwurzel sol sein 13, wie groß muß also die Zahl sein? Antw. 391.

Probe nach der Buchstabebezeichnung: $\frac{5n^2 - 5n}{2} + 1$.

Hier ist $13 = n$, dahero ist $5n^2 = 845$
$-5n = -65$
2) 780
390
+1
391 Die Zahl.

Mit 276 ist ein Centralfünfek formirt worden, wie viel kam auf eine Seite? Antw. 11.

Probe: 276 (2
552 (5 Eken.
27,60 | 52 Quadratw. — 5) 52 | $10\frac{2}{5}$, d. i. 11.
25 . .
100) 260
200
60
4
56 Wird nicht geachtet.

§. 374. Da nun, nach der bisherigen Anweisung, aus allen Seiten die Centralpoliigonalzahlen, und aus diesen hinwiederum jene gefunden werden können, so würde überflüssig sein, desfals mehrere Vorgaben zu geben.

Z. E. Man wil eine Centraldecagonal- oder 10 ekigte Zahl formiren, und auf eine Seite 12 nehmen, wie groß wird sothane Zahl werden?

Hier wird erst die gemeine Trigonalzahl gesuchet, also, daß für dieselbe auf eine Seite 1 Glied weniger genommen werde, als die Seite der Centralzahl sein sol (§. 367. 368).

```
      11 Die Glieder der gemeinen Trigonalzahl:
      11
     ----
      11
      11
     ----
     121
    + 11
     ----
  2) 132
     ----
      66 Die gemeine Trigonalzahl.
      10 Eken der Centraldecagonalzahl (§. 361), wel-
     ----    cher 2 weniger sein müssen, als Einten auf
     660     eine Seite komen sollen (§. 362).
     + 1
     ----
     661 Centraldecagonalzahl.
```

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist: $\frac{10n^2 - 10n}{2} + 1$, die allgemeine Bezeichnung aber also: $\frac{mn^2 - mn}{2} +$, da m eine jede Zahl der Eken bedeuten kan.

Ausziehung der Wurzel zur Probe:

```
      6 6 1 (2
     ---------
     1 3 2 2
         1 0
     -----------
     1,3 2,2 0 | 114 Quadrat-     10) 114 | 11 4/10 Mithin ist eine
     1 . . . .       wurzel.                        Seite 12.
     -----------
200) 3 2 2 0
     2 0 0 0
     -----------
     1 2 2 0
     — 1 0 0
     -----------
220) 1 1 2 0
       8 8 0
     -----------
       2 4 0
     — 1 6
     -----------
     2 2 4 Wird nicht geachtet.
```

Von den

Columnar- oder Såulenzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 375.

Ueberhaupt wird ein jedes Product, welches entstehet, wann eine Poliigonalzahl (§. 344) mit ihrer Wurzel, d. i. in Ansehung der geometrischen Figur (§. ibid.), mit einer ihrer Seiten (§. 348) multiplicirt wird, eine Columnar- oder Såulenzahl genennet, weil ihre Einten in einer ekigten Såulenfigur vorgestellet werden können.

§. 376. Insonderheit erhält eine jede Columnarzahl nach derjenigen Poliigonalzahl, aus welcher sie entstehet, wiederum ihren besondern Nahmen, als: Trigonalcolumnar-Tetragonalcolumnar-Pentagonalcolumnarzahl, u. s. f. (§. 345).

§. 377. Es werden aber sothane Zahlen ebenfals, wie §. 346, in gemeine Columnar- und in Centralcolumnarzahlen getheilet.

Derowegen folget:

I. Von

I. Von den gemeinen Columnar- oder Säulenzahlen, und ihren Wurzeln.

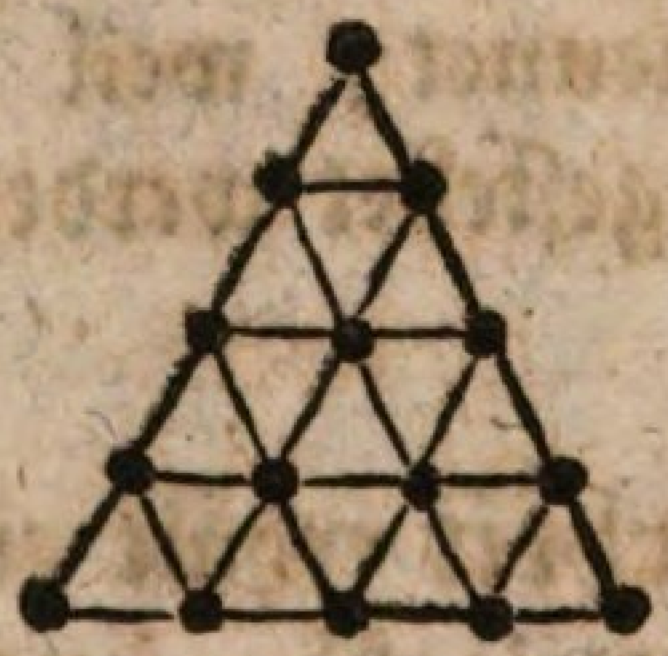
§. 378. Wann eine gemeine Trigonalzahl (§. 347) mit ihrer Wurzel multiplicirt wird, so erhält man eine gemeine Trigonalcolumnarzahl.

Z. E. Es würde die gemeine Trigonalzahl 15 gegeben, um nach derselben eine gemeine Trigonalcolumnarzahl zu formiren, so geschiehet es also:

15 (2
30 | 5 Die Wurzel nach §. 349, mit welcher nun die Trigonalzahl multiplicirt wird.
5

15
5
75 Ist die gemeine Trigonalcolumnarzahl.

Mit dieser gemeinen Trigonalcolumnarzahl kan nun eine Figur formiret werden, davon die Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält eine gemeine Trigonalzahl, von 15 Puncten, von welchen 5 auf einer Seite stehen (§. 347).

Wird diese Grundlage 5 mahl übereinander gesezt, so macht der Inhalt 75, als die gemeine Trigonalcolumnarzahl, welche auch auf viele andere Dinge und Fragen angewendet werden kan.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist: $\frac{n^3 + n^2}{2}$, dann die Trigonalzahl ist: $\frac{n^2 + n}{2}$ (§. 348); wird nun diese mit der Wurzel, nemlich n, multiplicirt (§. 378), so giebt es jene Formel: $\frac{n^3 + n^2}{2}$ (s. §. 81).

§. 379.

§. 379. Sol die Wurzel aus einer gemeinen Trigonalcolumnarzahl gezogen, oder, wann sie figürlich vorgebildet ist, gesuchet werden, wie viele Einten der Grundfläche oder der Höhe nach von einem Ek zum andern stehen müssen, so wird dieselbige erstlich dupliret, und aus dem Product die Cubicwurzel gezogen, der Rest aber, oder das Uebrigbleibende, wird nicht geachtet.

Z. E. Es sei aus der vorigen Trigonalcolumnarzahl 75 die Wurzel zu ziehen:

```
  75 (2
 ----
 150 | 5 Trigonalcolumnarzahl.
 125
 ----
  25
```

Daß 5 die Cubicwurzel aus 125, als der nächsten Zahl an 150, sei, weiß man nach §.207.

Ein dreiekigter Pfeiler bestehet aus 1183 gleichen Steinen, dabei die Grundlage so vielmahl auf einander gesezet worden, als sich Steine auf einer Seite der Grundlage befinden. Fr. Wie viel liegen auf einer Seite? Antw. 13.

Werden die Steine duplirt, und nach §.210 aus der Zahl die Cubicwurzel gezogen, so ist dieselbe 13, und bleiben 169 übrig, welche nicht geachtet werden.

Es sollen 2176 gleiche Steine in Form eines Dreieks also aufeinander gesezet werden, daß eine Seite der Grundfläche und die Höhe einander gleich seien. Fr. Wie viel müssen Steine auf eine Reihe kommen? Antw. 16.

Werden 2176 duplirt, und aus dem Product die Cubicwurzel gezogen, so komt zur Wurzel 16, und bleiben 256 übrig, die nicht geachtet werden.

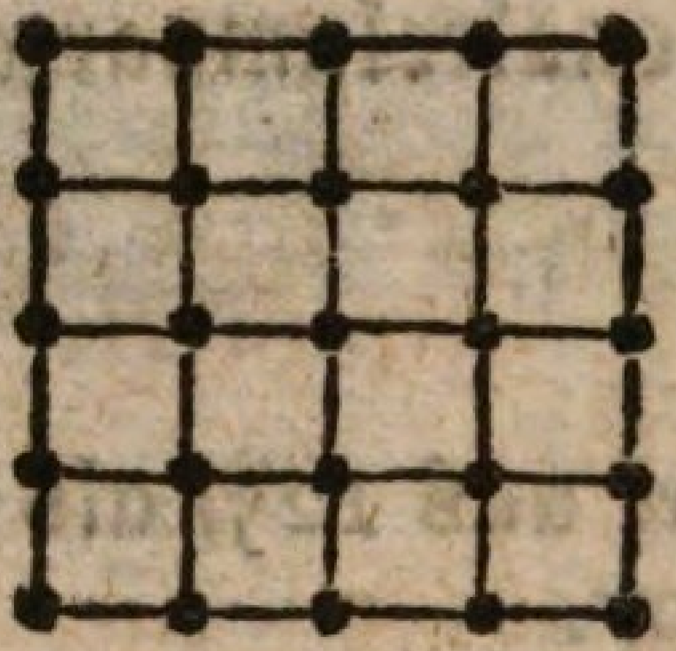
§. 380. Wird eine gemeine Tetragonalzahl (§. 350) mit einer Seite, oder ihrer Wurzel, multiplicirt, so ist das Product eine gemeine Tetragonalco-

nalcolumnarzahl, welche mit der Cubiczahl (§. 205) einerlei ist.

Z. E. Die gemeine Tetragonalzahl 25 sei gegeben, eine gemeine Tetragonalcolumnarzahl daraus zu formiren, so geschiehet solches also:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 5 \\ \hline 125 \end{array}$$ Ist die gemeine Tetragonalcolumnarzahl.

Mit dieser gemeinen Tetragonalcolumnarzahl kan nun eine Figur formiret werden, davon die Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält eine gemeine Tetragonalzahl von 25 Puncten, von welchen 5 auf einer Reihe stehen (§. 350).

Wird diese Grundlage von 25 Puncten 5 mahl übereinander gesezt, so macht der Inhalt 125, als die gemeine Tetragonalcolumnarzahl, welche auch auf andere Dinge und Fragen angewendet werden kan.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist nach gegenwärtigen Formeln: $\frac{2n^3 + 0n^2}{2}$, d. i. der doppelte Cubus von n, und $0n^2$ (d. i. nichts), mit 2 dividirt; sonsten aber ist sie eigentlich nur: n^3 (§. 213).

§. 381. **Die Wurzel aus einer gemeinen Tetragonalcolumnarzahl wird gezogen**, wie aus einer Cubiczahl (§. 213 u. f.), indeme der **Unterschied** nur in dem Nahmen bestehet (§. 380).

§. 382. **Wird eine gemeine Pentagonalzahl** (§. 352) **mit einer Seite, oder ihrer Wurzel, multiplicirt**, so entstehet dadurch eine gemeine Pentagonalcolumnarzahl.

Z. E. Die Pentagonalzahl wäre 22, so wird die Wurzel, welche 4 ist, nach §. 354 gefunden: multiplicirt man nun 22 mit der Wurzel, so giebt es die Columnarzahl: 88.

Hier hat man sich zu erinnern, was §.352 wegen der Figur gesagt worden.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist: $\frac{3n^3 - n^2}{2}$, welche in der Ordnung, wie §. 360, fortgehet, als: $\frac{4n^3 - 2n^2}{2}$, $\frac{5n^3 - 3n^2}{2}$ u. s. f.

§. 383. **Die Wurzel aus einer gemeinen Pentagonalcolumnarzahl, wie auch aus allen übrigen Poligonalcolumnarzahlen, wird nun nach denen §. 354 gegebenen Regeln ausgezogen, nur mit dem Unterschied, daß man hier mit dem Quadrat der Eken multiplicirt, alsdann die Cubicwurzel ausziehet (§. 379), und, nachdem dieselbige durch die Zahl der Eken dividirt worden, mit dem doppelten Unterschied theilet.**

Z. E. Die Pentagonalcolumnarzahl sei die Vorige, nemlich 88, so wird die Wurzel also gefunden:

```
        88(2
       ----
       176
        25  Quadrat der Eken, nemlich von 5.
       ----
       880
      352
      -----
      4,400 | 16 Cubicwurzel.
      1...
      -----
300)  3400
      1800
      -----
      1600
     -1080
      -----
       520
      -216
      -----
       304 Wird nicht geachtet.
```

Zahl der Eken: 5) 16 Dieses mit der doppelten Differenz, welche

$3\frac{1}{5}$ bei der Pentagonalzahl 3 ist (§. 352),

$+\frac{3}{5}$ dividirt: 6) $3\frac{3}{5} \mid \frac{18}{30} \mid \frac{3}{5}$.

$3\frac{4}{5}$, d. i. 4, als die Wurzel von der Pentagonalcolumnarzahl 88.

§. 384. Wil man zur Uebung grössere und mehrekigte Poliigonalcolumnarzahlen haben, um aus denselben die Wurzeln zu ziehen, so darf man nur die gemeine Poliigonalzahlen darzu machen, und alsdann solche, wie vorhin gezeiget worden, behandeln: oder man bezeichnet die Columnarzahlen gleich mit Buchstaben (§. 382), und bestimt nach Belieben die Wurzel.

Z. E. Man wolte eine Zahl geben, und fragen: wann damit eine Figur von 21 Eken bezeichnet werden solte, wie viel auf eine Reihe genommen werden müste, damit eine Seite der Grundlage der Höhe gleich sei? so weiß man, daß der Eken allezeit zwo mehr seien, als die Differenz der arithmetischen Progression ist (§. 362), folglichen die gemeine 21 ekigte Columnarzahl nach §. 382 also stehet:

$$\frac{19n^3 - 17n^2}{2}$$

Bestimt man nun eine Seite oder die Wurzel $n = 7$, so ist die Resolution:

7	7
7	7
49	49
7	17
343	343
19	49
3087	833
343	
6517	
−833	
2) 5684	

2842 Die Columnarzahl, welche zur Aufsuchung der Wurzel oder einer Seite gegeben werden kan, und welches nach vorheriger Anweisung also geschiehet:

2842

```
      2842
         2
    ------
      5684
       441 Das Quadrat der Eken.
    ------
      5684
    22736
   22736
   -------
   2506644

   2,506,644 | 135 Cubicwurzel.
   1......
   -------
30000) 1506644
        900000
       -------
        606644
      - 270000
       -------
        336644
         27000
       -------
50700)  309644
        253500
       -------
         56144
        - 9750
       -------
         46394
         - 125
       -------
         46269 Wird nicht geachtet.
```

Anzahl der Eken: 21) 135

38) $6\frac{3}{7}$ Dieses wird wieder mit der dop-

$+\frac{45}{266}$ pelten Differenz, nemlich mit 38, dividirt.

$6\frac{159}{266}$, oder 7, die Wurzel.

II. Von den Centralcolumnar- oder Säulenzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 385. Wann eine Centralpoliigonalzahl (§. 364 u. f.) mit einer ihrer Seiten oder Wurzel (§. 348) multiplicirt, d. i. so oft genommen, oder, wann es eine Figur betrift (§. 367), so oft übereinander gesezet wird, als dieselbige auf einer Seite Einten hat, so entstehet dadurch überhaupt eine Centralcolumnarzahl.

§. 386. Insonderheit erhält eine Centralcolumnarzahl ihren Beinahmen nach der Zahl, woraus sie entstanden, dergestalten, wann man eine Centraltrigonalzahl (§. 367) mit ihrer Seite oder Wurzel multiplicirt, eine Centraltrigonalcolumnarzahl, wann man eine Centraltetragonalzahl (§. 370) mit ihrer Wurzel multiplicirt, eine Centraltetragonalcolumnarzahl u. s. f. entstehet.

§. 387. Centralcolumnarzahlen aber heissen solche Columnarzahlen, weilen die Zahlen, woraus sie entstehen (§. 385), in Ansehung ihrer Figuren (§. 378), allemal eine Eins in der Mitte haben (§. 366), und gegenwärtig der Figur (§. 375) auch eine Eins in die Mitte komt.

§. 388. Sol nun eine Centraltrigonalcolumnarzahl formiret werden, so wird allezeit die Centraltrigonalzahl (§. 385) mit der Wurzel multiplicirt.

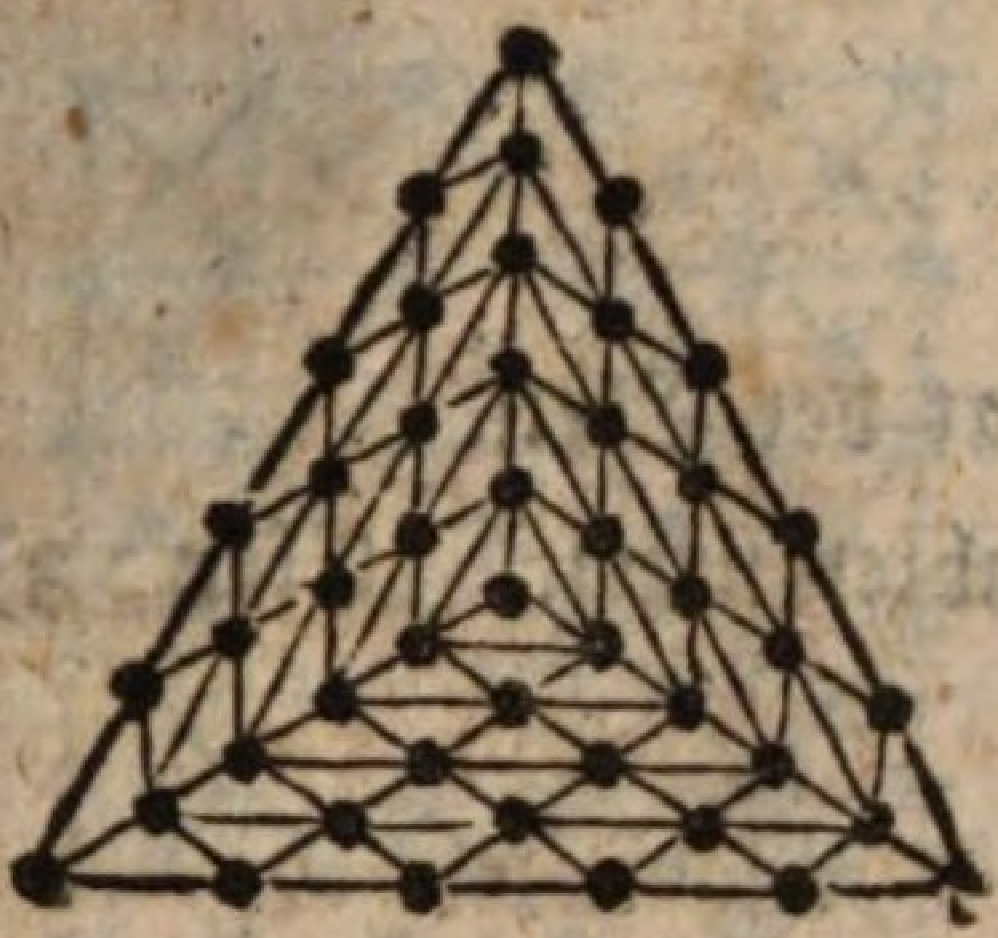
Z. E. Wie groß muß eine Centraltrigonalcolumnarzahl sein, wann auf eine Seite oder Reihe 6 kommen sollen?

Die Centraltrigonalzahl sei nach §. 367 und 368

46
6 Die Reihe oder die Wurzel.
276 Centraltrigonalcolumnarzahl.

Mit

Mit dieser Zahl kan nun eine Figur bezeichnet werden, davon die Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält eine Centraltrigonalzahl (§. 367) von 46 Puncten, von welchen 6 auf einer Seite, oder von einem Ek zum andern, stehen.

Wird dieselbige sechsmahl übereinander gesezt, so ist die Centraltrigonalcolumnarzahl 276, welche man sousten auch auf andere Dinge anwenden kan.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist: $\frac{3n^3 - 3n^2}{2} + n$;

dann wann die Centraltrigonalzahl: $\frac{3n^2 - 3n}{2} + 1$ (§. 368) mit n multiplicirt wird, so komt jene Centraltrigonalcolumnarzahl.

Nimt man, wie es gegenwärtig ist, $n = 6$,

$$\begin{array}{rl} \text{so ist } 3n^3 & = 648 \\ -3n^2 & = -108 \\ & 2)\ 540 \\ & \quad 270 \\ n & = \quad 6 \\ & \quad 276 \end{array}$$

276 Die Centraltrigonalcolumnarzahl.

§. 389. **Die Wurzel aus einer Centraltrigonalcolumnarzahl wird nach §. 383 ausgezogen, nur mit dem Unterschied, daß man zulezt nach §. 369 verfähret.**

Z. E. Es sei aus der vorigen Centraltrigonalcolumnarzahl die Wurzel zu ziehen:

```
       276
         2
     -----
       552
         9 Quadrat der Eken.
     -----
     4,968 | 16 Cubicwurzel.   Eken: 3) 16 | 5⅓, mithin ist 6
      1000                             (1      die Wurzel.
     -----
300) 3968
     1800
     -----
     2168
    —1080
     -----
     1088
    —216
     -----
      872 Wird nicht geachtet.
```

Welches ist die Centraltrigonalcolumnarwurzel aus 4740? Antw. 15?

Wann aus der doppelten Zahl, mit 9 multiplicirt, die Cubicwurzel gezogen wird, so erhält man 44, und bleibt übrig 136, welches nicht geachtet wird.

Eine Centraltrigonalcolumnarzahl ist 3055, welches ist die Wurzel? Antw. 13.

Hier wird bei Ausziehung der Wurzel 38 kommen, und 118, so nicht geachtet werden, übrig bleiben.

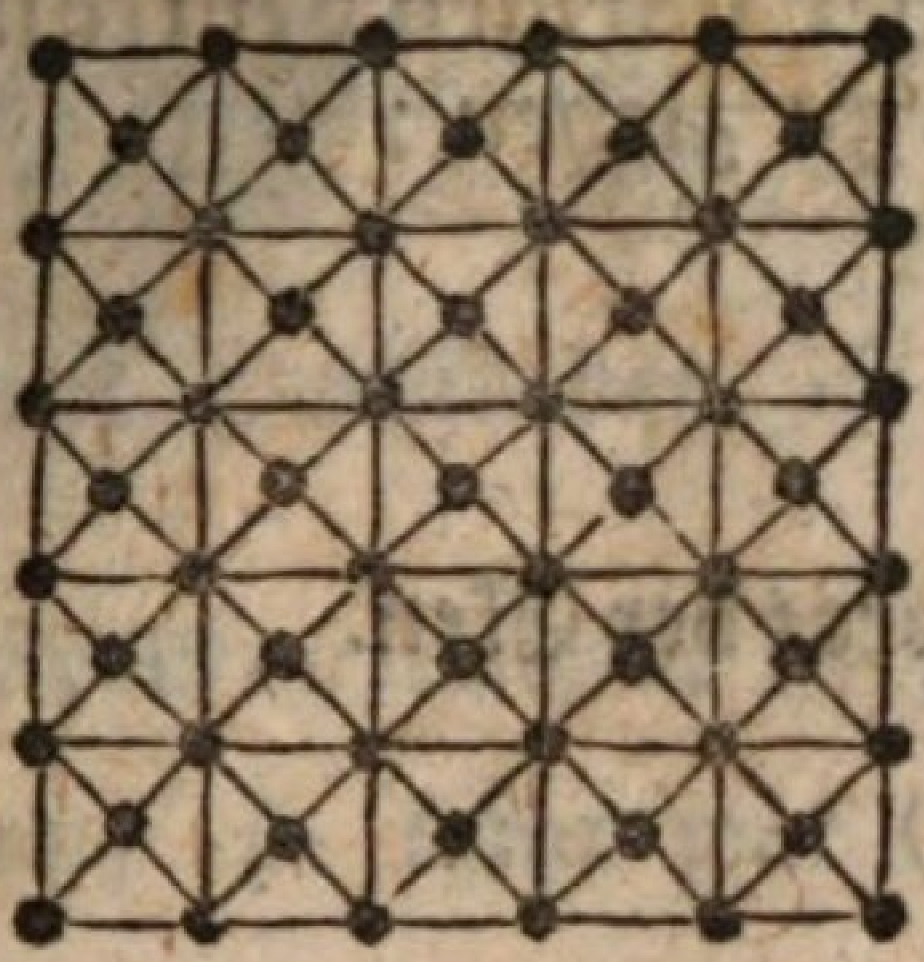
§. 390. Wird eine Centraltetragonalzahl (§. 385) mit ihrer Wurzel multiplicirt, so entstehet dadurch eine Centraltetragonalcolumnarzahl.

Z. E. Die Centraltetragonalzahl sei nach §. 370:

```
   61
    6 Die Wurzel.
  ---
  366 Centraltetragonalcolumnarzahl.
```

Mit

Mit dieser Zahl kan nun eine Figur bezeichnet werden, davon die Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält eine Centraltetragonalzahl von 61 Puncten, von welchen 6 auf einer Seite, oder von einem Ek zum andern, stehen.

Wird dieselbige sechsmahl übereinander gesezt, so ist die Centraltetragonalcolumnarzahl 366, welche, wie schon bekant, auch auf andere Fragen angewendet werden kan.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist: $\frac{4n^3 - 4n^2}{2} + n$;

dann wann die Centraltetragonalzahl (§. 370) $\frac{4n^2 - 4n}{2} + 1$ mit n multiplicirt wird, so komt jene Centraltetragonalcolumnarzahl.

Nimt man, wie es gegenwärtig ist, $n = 6$,

$$
\begin{array}{rr}
\text{so ist } 4n^3 = & 864 \\
-4n^2 = & -144 \\
2) & \underline{720} \\
 & 360 \\
n = & 6 \\
 & \overline{366}
\end{array}
$$
Die Centraltetragonalcolumnarzahl.

§. 391. Die Wurzel einer Centraltetragonalcolumnarzahl wird allezeit wie vorhin §. 389 ausgezogen, nur daß man das Quadrat der Eken, womit

 das

das Duplum der Columnarzahl multiplicirt wird, wohl beobachte (§. 383).

Z. E. Es sei aus der vorigen Centraltetragonalcolumnarzahl 366 die Wurzel zu ziehen:

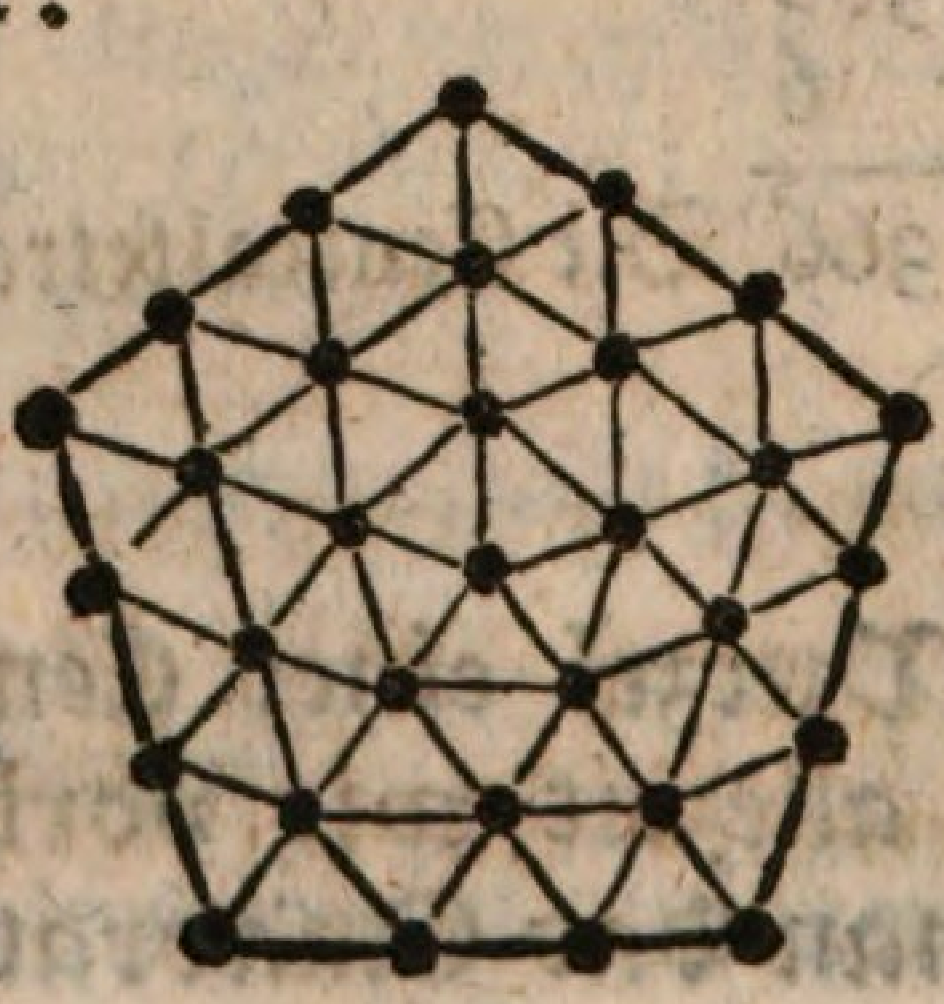
366
2
———
732
16 Quadrat der Eken.
———
4392
732
———
11,712 | 22 Cubicwurzel. Eken: 4) 22 | $5\frac{1}{2}$, oder 6, ist (2 die Wurzel.
8000
———
1200) 3712
2400
———
1312
—240
———
1072
8
———
1064 Wird nicht geachtet.

§. 392. **Wird eine Centralpentagonalzahl (§. 385) mit ihrer Wurzel multiplicirt, so entstehet dadurch eine Centralpentagonalcolumnarzahl.**

Z. E. Die Centralpentagonalzahl sei nach §. 372:

31
4 Die Wurzel.
———
124 Centralpentagonalcolumnarzahl.

Mit dieser Zahl kan nun eine Figur bezeichnet werden, davon die Grundlage also ist:



Diese

Diese Grundlage enthält eine Centralpentagonalzahl von 31 Puncten, von welchen 4 auf einer Seite, oder von einem Ek zum andern, stehen.

Wird diese Grundlage viermahl übereinander gesezt, so macht die Centralpentagonalcolumnarzahl 124.

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist: $\frac{5n^3 - 5n^2}{2} + n$;

dann wann die Centralpentagonalzahl (§.372) $\frac{5n^2 - 5n}{2} + 1$ mit n multiplicirt wird, so komt jene Centralpentagonalcolumnarzahl.

Nimt man, wie es gegenwärtig ist, $n = 4$,

so ist $5n^3 = 320$
$-5n^2 = -80$
2) 240
120
$n = 4$
124 Centralpentagonalcolumnarzahl.

Die Ausziehung der Wurzel geschiehet, wie vorhin:

124
2
248
25 Quadrat der Eken.
1240
496
6,200 | 18 Cubicwurzel. Eken: 5) 18 | $3\frac{3}{5}$, oder 4, ist (3 die Wurzel.
1000
300) 5200
2400
2800
−1920
880 − 512 = 368, wird nicht geachtet.

Nota. Wil man grössere und mehrekigte Centralcolumnarzahlen zur Uebung haben, so darf man nur nach Masgab der Eken, die eine Columnarzahl haben sol, erst die Centralzahl suchen (§. 364 u.f.), und alsdann nach §. 388 die Columnarzahl formiren.

Z. E. Man wolte eine Centraldecagonal- oder 10 ekigte Columnarzahl haben, auf deren einen Seite 12 Puncten zu stehen kämen, so wird die Centralzahl darzu erst also gefunden:

Weil die Seite der Centralzahl 12 sein sol, so muß die Seite der gemeinen Trigonalzahl 11 haben (§. 367).

```
     11
     11
    ----
     11
    11
    ----
    121
   +11
   ----
2) 132
   ----
     66 Gemeine Trigonalzahl.
     10 Eken der Centralzahl.
   -----
    660
     +1
   -----
    661 Centraldecagonalzahl.
     12 Eine Seite, oder Wurzel, der verlangten Co-
   -----            lumnarzahl.
   1322
   661
   -----
   7932 Centraldecagonalcolumnarzahl.
```

Die Bezeichnung mit Buchstaben ist: $\frac{10n^3 - 10n^2}{2} + n$.

Da $n = 12$, so ist die Probe: $10n^3 = 17280$

$-10n^2 = -1440$

```
2) 15840
   -----
    7920
      12
   -----
    7932 Die Columnarzahl.
```

Aus dieser Zahl wird nun die Wurzel also gezogen:

```
        7932
           2
       -----
       15864
         100 Quadrat der Eken.
      ------
    1,586,400 | 116 Cubic-      Eken: 10) 116 | 11 3/5, oder 12, als
    1 . . . . .     wurzel.                     eine Seite, oder
      --------                                  die Wurzel.
30000) 586400
       300000
       ------
       286400
       -30000
       ------
       256400
        -1000
       ------
36300) 255400
       217800
       ------
        37600
       -11880
       ------
        25720
          216
       ------
        25504 Wird nicht geachtet.
```

Von den
Piramidalzahlen,
und
ihren Wurzeln.

§. 393.

Wann Poliigonalzahlen, welche sich von 1 anfangen (§. 344), addirt werden, so entstehet dadurch überhaupt eine Piramidalzahl, weil mit ihren Einten allezeit eine regelmässige piramidenförmige Figur formiret werden kan.

§. 394. Insonderheit erhält eine jede Piramidalzahl nach derjenigen Poliigonalzahl, aus welcher sie entstehet, wiederum ihren besondern Nahmen, als: Trigonalpiramidalzahl, Tetragonalpiramidalzahl, Pentagonalpiramidalzahl u. f. f. (§. 376).

§. 395. Es werden aber sothane Zahlen ebenfals, wie §. 377, in gemeine Piramidal- und in Centralpiramidalzahlen eingetheilet.

Derowegen folget:

I. Von den gemeinen Piramidalzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 396. **Wann gemeine Trigonalzahlen (§. 347) von 1 an addirt werden,** so bekomt man eine **gemeine Trigonalpiramidalzahl.**

Z. E. 1. 3. 6. 10. 15. 21 u. s. f. sind gemeine Trigonalzahlen (§. 347): werden nun von denselben addirt, so giebts gemeine Trigonalpiramidalzahlen, als: $1+3=4$, item: $1+3+6=10$ u. s. f. sind dergleichen Zahlen, und stehen in der Ordnung von 1 an: 1. 4. 10. 20. 35. 56 u. s. f.

§. 397. Ehe und bevor aber die Bezeichnung der Piramidalzahlen mit Buchstaben gezeiget werden kan, ist nöthig zu wissen, wie die Summen derer in einer natürlichen Ordnung aufeinander folgenden gemeinen Zahlen und deren Potenzen mit Buchstaben bezeichnet und gefunden werden müssen.

§. 398. Wann man das Glied, oder die Zahl, bis auf welche die Glieder oder die Zahlen vom ersten Glied, d. i. von 1 an, summirt werden sollen, mit n, und die Summe der Glieder mit S bezeichnet, so bekomt man folgende allgemeine Formeln:

Sn^0, oder $S1$, bedeutet eine Summe Eintenglieder, die bis auf n fortgehen (§. 53 d).

Sn^1, oder nur Sn, die Summe der Glieder, welche in einer gemeinen Ordnung bis auf n fortgehen §. 53 b. c.).

Sn^2, die Summe der Quadratzahlen.

Sn^3, die Summe der Cubiczahlen u. s. w.

Z. E. Die Summe der Einten: $1+1+1+1+1$ u. s. w. wird bezeichnet: Sn^0, oder $S1$.

Die Summe gemeiner oder natürlicher Zahlen: $1+2+3+4$ u. s. f. also: Sn.

Die

Die Summe derer in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgenden Quadratzahlen: $1+4+9+16+25$ u. s. f. also: Sn^2.

Die Summe derer in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgenden Cubiczahlen: $1+8+27+64$ u. s. f. also: Sn^3.

§. 399. Ereignet sich der Fall, daß ein Glied weiter als n genommen werden muß, so wird natürlicher Weise der Summe 1 zugefüget.

Z. E. Die Summe einer Reihe Eintenglieder, und noch eins darzu, wird bezeichnet: $S(n+1)^0$. Nimt man z. E. $n=5$, so ist $1+1+1+1+1=5$, und noch 1 darzu, macht 6 zur Summe.

Die Summe der Glieder gemeiner oder natürlicher Zahlen, und das folgende Glied darzu, also: $S(n+1)$. Nimt man z. E. hier $n=4$, so ist: $1+2+3+4=10$, worzu das folgende Glied, nemlich 5, komt, und die Summe also 15 ist.

Die Summe derer in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Quadratzahlen, und noch ein Glied, das ist, die folgende Quadratzahl darzu, wird also bezeichnet: $S(n+1)^2$. Nimt man z. E. $n=4$, so ist: $1+4+9+16=30$, worzu das folgende Glied, nemlich 25, komt, mithin die Summe 55 ist.

Die Summe derer in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Cubiczahlen, und noch das folgende Glied, wird bezeichnet: $S(n+1)^3$. Nimt man z. E. $n=3$, so ist: $1+8+27=36$, worzu das folgende Glied, nemlich 64, komt, folglichen die Summe 100 ist.

§. 400. Wird eine kleinere Summe von einer grössern Summe weggethan, so ist offenbar, daß das lezte Glied der grössern Summe bleiben müsse.

Z. E.	Sn^0	von	$S(n+1)^0$	bleibt:	n^0
	Sn	-	$S(n+1)$	-	$n+1$
	Sn^2	-	$S(n+1)^2$	-	$(n+1)^2$
	Sn^3	-	$S(n+1)^3$	-	$(n+1)^3$

Welches man mit gemeinen Zahlen probiren kan, wann n, wie vorhin, zu einer beliebigen Zahl bestimt wird.

§. 401. Betrachtet man die Bezeichnung der Summe gemeiner oder natürlicher, das sind, Trigonalzahlen, welche ist: $\frac{n^2 + n}{2}$ (§. 347. 348), so erkennet man aus der Division mit 2, daß solche $\frac{1}{2}$ Quadrat, und die Helfte aus der Wurzel desselben sei, mithin mit Coefficienten also bezeichnet werden könne: $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, folglichen ist Sn so viel, als: $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$: Grössert man diese Formel mit 2, so komt jene Formel: $\frac{n^2 + n}{2}$, wieder, folglichen Sn (§. 398).

§. 402. Hieraus ersiehet man, daß die Summe gemeiner Zahlen bis auf ein bestimtes Glied gefunden werde, wann man zu dem halben Quadrat des bestimten Gliedes die halbe Wurzel desselben addirt, oder, welches einerlei, zu dem Quadrat die Wurzel addirt, und die Summe durch 2 dividirt.

Z. E. Man solte die Summe von 1 bis 10 suchen, so ist das Quadrat von 10, 100, die Helfte davon 50, und die Helfte von 10, 5, mithin ist die Summe: 50 + 5, oder 55.

Oder: Das Quadrat: 100 + 10, als der Wurzel, mit 2 dividirt, bringt auch 55.

§. 403. Gleichwie nun eine Summe gemeiner Zahlen mit Coefficienten vorgestellet werden kan (§. 401), also kan auch die Summe der in einer natürlichen Ordnung aufeinander folgenden Quadraten (§. 398) mit Coefficienten bezeichnet werden, indeme man gefunden hat, daß $\frac{1}{3}$ vom Cubus, die Helfte vom Quadrat, und $\frac{1}{6}$ des bestimten Gliedes, die Summe der Quadraten sei, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung aufeinander folgen, mithin die Bezeichnung sothaner Summe also ist: $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

§. 404. Werden diese Glieder mit 6 gegrösser, so erhält man ganze Zahlen, und 6 wird der Divisor, also: $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, mithin ist diese Formel gleich der Formel Sn^2 (§. 398), und man hat die Regel: **Der doppelte Cubus der bestimten Wurzel, das dreifache Quadrat derselben, und dieselbige selbst, werden addirt, und die Summe wird mit 6 dividirt.**

Z. E. Das bestimte Glied sei 5, so ist:

$$\begin{array}{rl}
5 & \\
\underline{5} & \\
25 & \\
\underline{5} & \\
125 & \\
\underline{2} & \\
250 & \text{Der doppelte Cubus.} \\
5 & \\
\underline{5} & \\
25 & \\
\underline{3} & \\
75 & \text{Dreifaches Quadrat.} \\
250 & \text{Der doppelte Cubus.} \\
\underline{5} & \text{Das bestimte Glied.} \\
6)\,330\,|\,55 & \text{Ist die Summe der Quadraten, deren Wurzeln} \\
 & \text{in natürlicher Ordnung bis auf 5 fortgehen.}
\end{array}$$

§. 405. Hieraus ist von selbst zu schliessen, daß sich auch die Cubiczahlen, deren Wurzeln in einer natürlichen Ordnung fortgehen, durch Coefficienten bezeichnen lassen müssen, und man hat gefunden, daß $\frac{1}{4}$ vom Quadratoquadrat (§. 227), die Helfte vom Cubus, und $\frac{1}{4}$ vom Quadrat des bestimten Glieds, die Summe der Cubiczahlen sei, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung aufeinander folgen, mithin die Bezeichnung sothaner Summe also ist: $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$.

§. 406. Werden diese Glieder mit 4 gegrössert, so erhält man ganze Zahlen, und 4 wird der Divisor, also: $\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$, folglichen ist diese Formel eben so viel, als vorhin Sn^3 (§. 398), und man hat die Regel: **Das Quadratoquadrat, der doppelte Cubus, und das Quadrat der bestimten Wurzel, werden addirt, und die Summe wird mit 6 dividirt.**

Z. E. Das bestimte Glied sei 5, so ist:

```
   5                                    5
   5                                    5
  ---                                  ---
  25                                   25
   5                                    5
  ---                                  ---
 125                                  125
   5                                    2
  ---                                  ---
 625 Quadratoquadrat.                 250
 250 Doppelter Cubus.
  25 Quadrat der Wurzel.
 ----
4) 900 | 225 Ist die Summe der Cubiczahlen, deren
   12          Wurzeln in natürlicher Ordnung bis auf
               5 fortgehen.
```

§. 407. Nachdem vom Bezeichnen der Summen der Potenzen derer in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden gemeinen Zahlen das Nöthige gezeiget worden, so kan nun von den Piramidalzahlen ohne Anstand fortgefahren werden.

§. 408. **Wann**, wie vorhin gemeldet (§. 396), gemeine Trigonalzahlen, welche sich von 1 anfangen, addirt werden, so entstehet daraus eine gemeine Trigonalpiramidalzahl.

Nach §. 348 ist die Bezeichnung einer Trigonalzahl: $\frac{n^2 + n}{2}$

Diese etlichmahl zu nehmen, welches man summiren nennet (§. 398), um eine Trigonalpiramidalzahl zu bekommen, sezet man vor ein jedes Glied den Buchstaben S, also: $\frac{Sn^2 + Sn}{2}$, so hat man die Bezeichnung einer Trigonalpiramidalzahl.

§. 409. Da nun nach §. 404 die Formel Sn^2 gleich ist der Formel $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, und nach §. 401 Sn der Formel $\frac{n^2 + n}{2}$, so bezeichnen dieselbige die Summe beliebiger gemeiner Trigonalzahlen, und somit eine gemeine Trigonalpiramidalzahl, zu welchem Ende sie zusammengesezet und addirt werden müssen.

§. 410. Weil aber die Addition nach dem Verhältnis der Divisoren geschehen muß, dabei leicht gefehlet werden kan, so nimt man nur die Formeln ohngegrössert nach ihren Coefficienten (§. 403. 401), und addiret solche gewöhnlich, als:

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{ und } \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

Reduc. $2n^3 + 3n^2 + n + 3n^2 + 3n$

2) $2n^3 + 6n^2 + 4n$

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

Diese Formeln werden, um Ganze zu bekommen, mit 6 gegrössert, mithin müssen sie auch hernach, nachdem erst mit 2 dividirt worden, wiederum mit 6 dividirt werden.

§. 411. Hieraus erkennet man, daß zu einer jeden gemeinen Trigonalpiramidalwurzel, d. i. wie viel Trigonalzahlen addirt worden (§. 408), und deren allgemeine Bezeichnung $\frac{n^2 + n}{2}$ ist (§. 401), ihre Zahl gefunden werde, wann der Cubus der gegebenen Wurzel, das dreifache

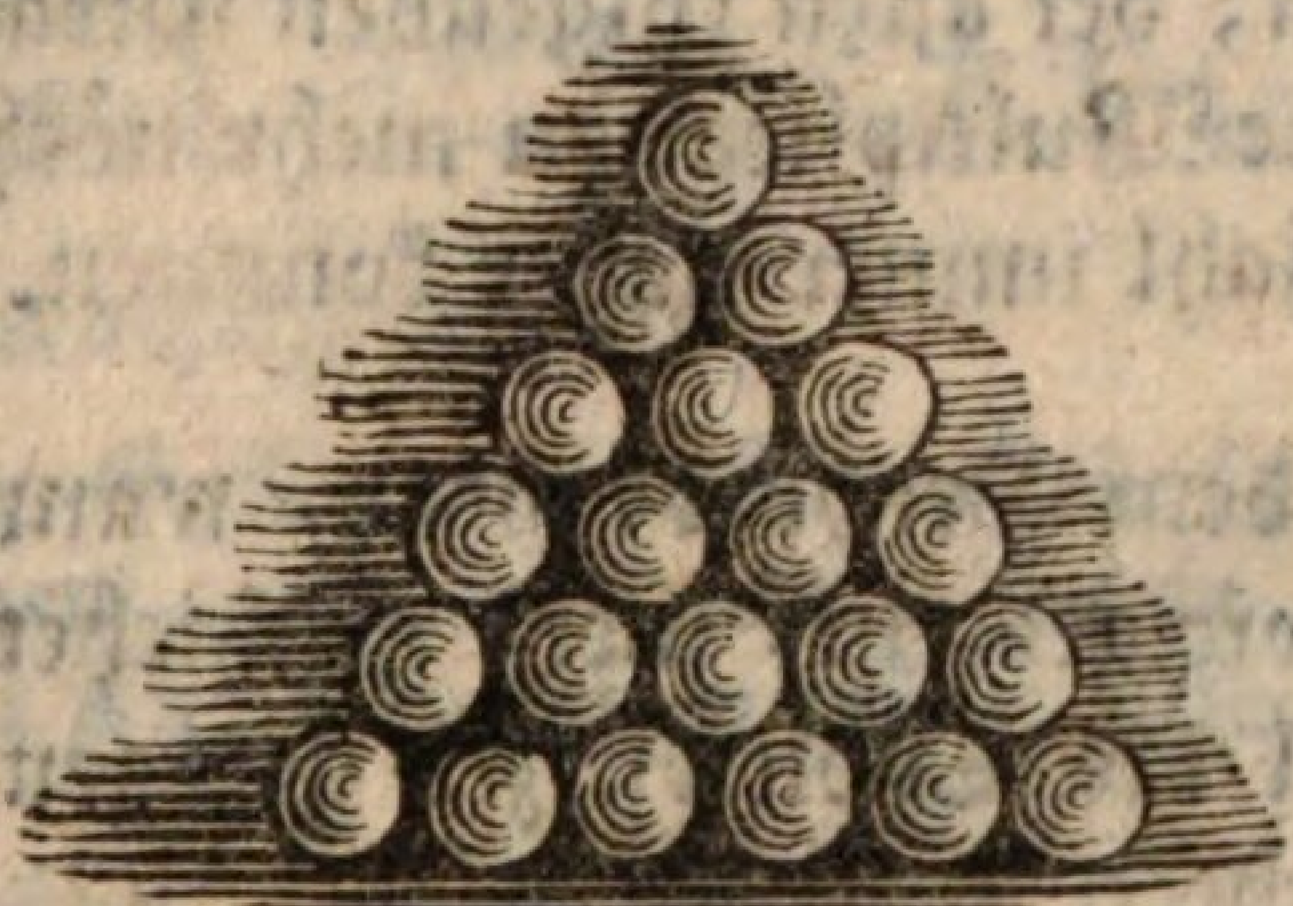
fache Quadrat derselben, und sothane Wurzel doppelt genommen, addirt, und die Summe mit 6 dividirt wird.

Z. E. Es sol n als die Wurzel einer gemeinen Trigonalpiramidalzahl $= 6$ sein, oder, welches einerlei, es wären 6 Glieder oder gemeine Trigonalzahlen in ihrer Ordnung, von 1 anfangend, gegeben, um die Piramidalzahl daraus zu suchen:

$$n^3 = 216$$
$$3n^2 = 108$$
$$2n = 12$$

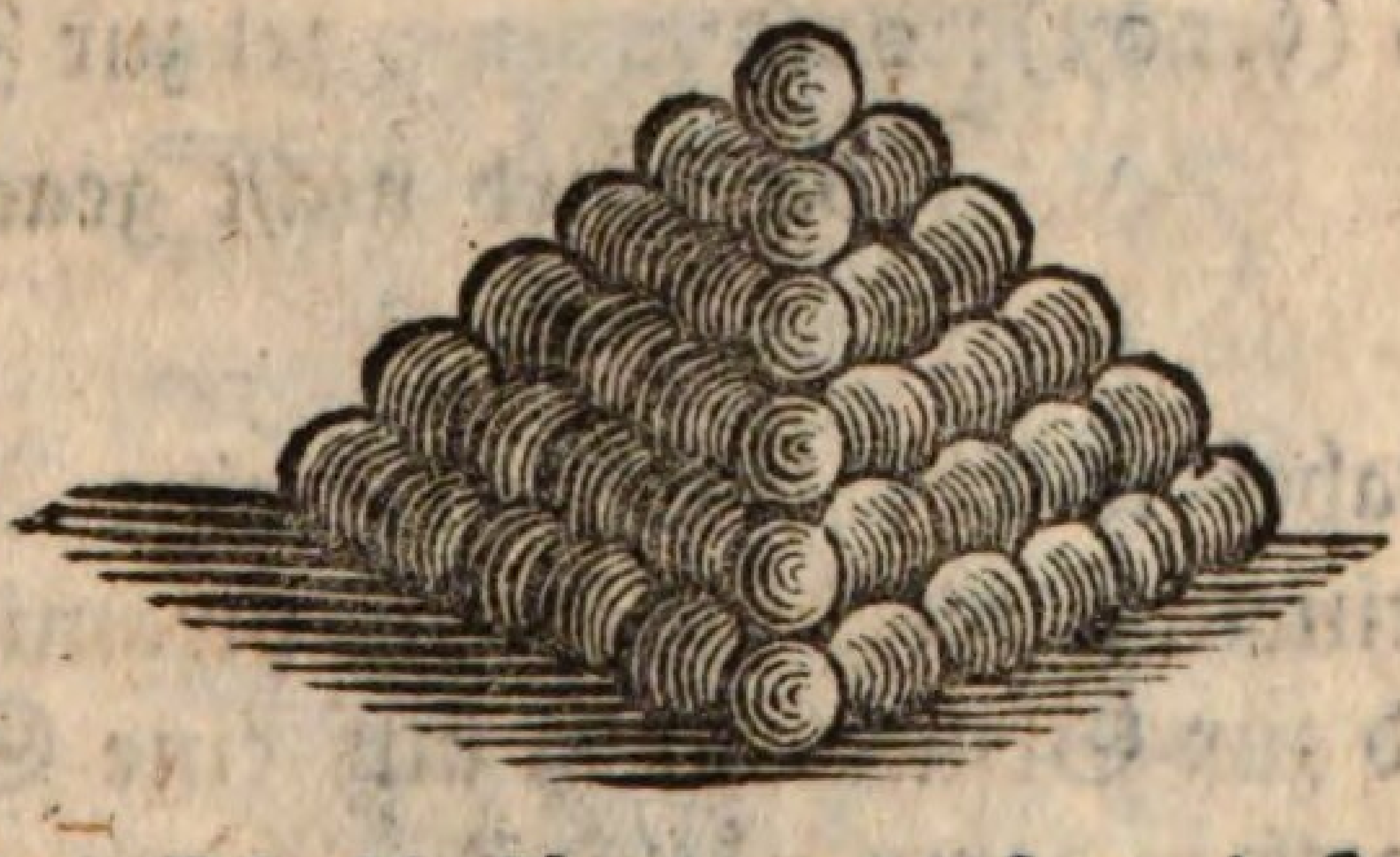
6) 336 | 56 Ist die gemeine Trigonalpiramidalzahl.

Mit dieser Zahl kan nun eine Figur formiret werden, davon die Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält 21 Kugeln, und also das sechste Glied von Trigonalzahlen (§. 347).

Werden auf diese Grundlage 15. 10. 6. 3. 1 Kugeln, als die übrigen Trigonalzahlen, gesezet, so entstehet dadurch diese piramidenförmige Figur (§. 393) von 56 Kugeln, welche Zahl auch sonsten auf allerlei Fälle zu appliciren ist.



Nota. Wollen sich Anfängere diese und folgende Piramidalzahlen practisch vorstellen, so kan solches durch Aufhäuffelung gleicher Schieskugeln geschehen, davon die Grundlage unter andern in Sand vestgesezet werden kan.

§. 412. **Die Wurzeln aus gemeinen Piramidalzahlen zu ziehen**, oder die Einten zu finden, welche sowohl in der Grundlage von einem Ek zum andern, als auch auf einer Eke in der Höhe sich befinden, wird also verfahren:

1) Wird die Piramidalzahl multiplicirt, und zwar:

a) Eine Trigonalpiramidalzahl mit 5.

b) Eine Tetragonalpiramidalzahl mit 3.

c) Eine Pentagonalpiramidalzahl mit 2.

d) Eine Hexagonalpiramidalzahl mit $1\frac{1}{2}$, wovon die Gründe in der Geometrie gefunden werden können; bei allen folgenden Piramidalzahlen aber ist keine Multiplication mehr nöthig, weil sie einer Cubiczahl immer näher kommen.

2) Wird aus dem Product, oder, wann keine Multiplication, wie gedacht, mehr geschiehet, aus der Piramidalzahl die Cubicwurzel gezogen, und der Rest nicht geachtet.

Z. E. **Es sei die vorige Trigonalpiramidalzahl 56, aus welcher die Wurzel gezogen werden solte:**

$$\begin{array}{rl} & 56 \\ & \underline{5} \\ & 280 \mid 6 \text{ Die Trigonalpiramidalwurzel zur Zahl 56.} \\ \text{Cubiczahl von 6 (§. 207):} & \underline{216} \\ & 64 \text{ Wird nicht geachtet.} \end{array}$$

Einem Constabel wurde befohlen, eine Anzahl gleicher Stükkugeln in einem Dreiek ordentlich piramidenmässig aufzuhäuffeln, und zur Grundlage 9 auf eine Seite zu legen. Fr. Wie viel hatte er darzu nöthig? Antw. 165.

Nimt man nach gegebener allgemeinen Regel (§. 411) $n = 9$, so erhält man diese Zahl.

In einem Zeughaus lagen 220 Kugeln in einem Dreiek piramitisch aufgehäuffelt, wie viel lagen derselben im Grunde auf einer Reihe, oder in der Höhe? Antw. 10.

Wann die Zahl mit 5 multiplicirt und aus dem Product nach §. 208 die Cubicwurzel gezogen wird, so bekomt man zur Wurzel 10, und 100 bleiben übrig.

§. 413. **Werden gemeine Tetragonalzahlen (§. 350) von 1 an addirt, so komt zur Summe eine gemeine Tetragonalpiramidalzahl.**

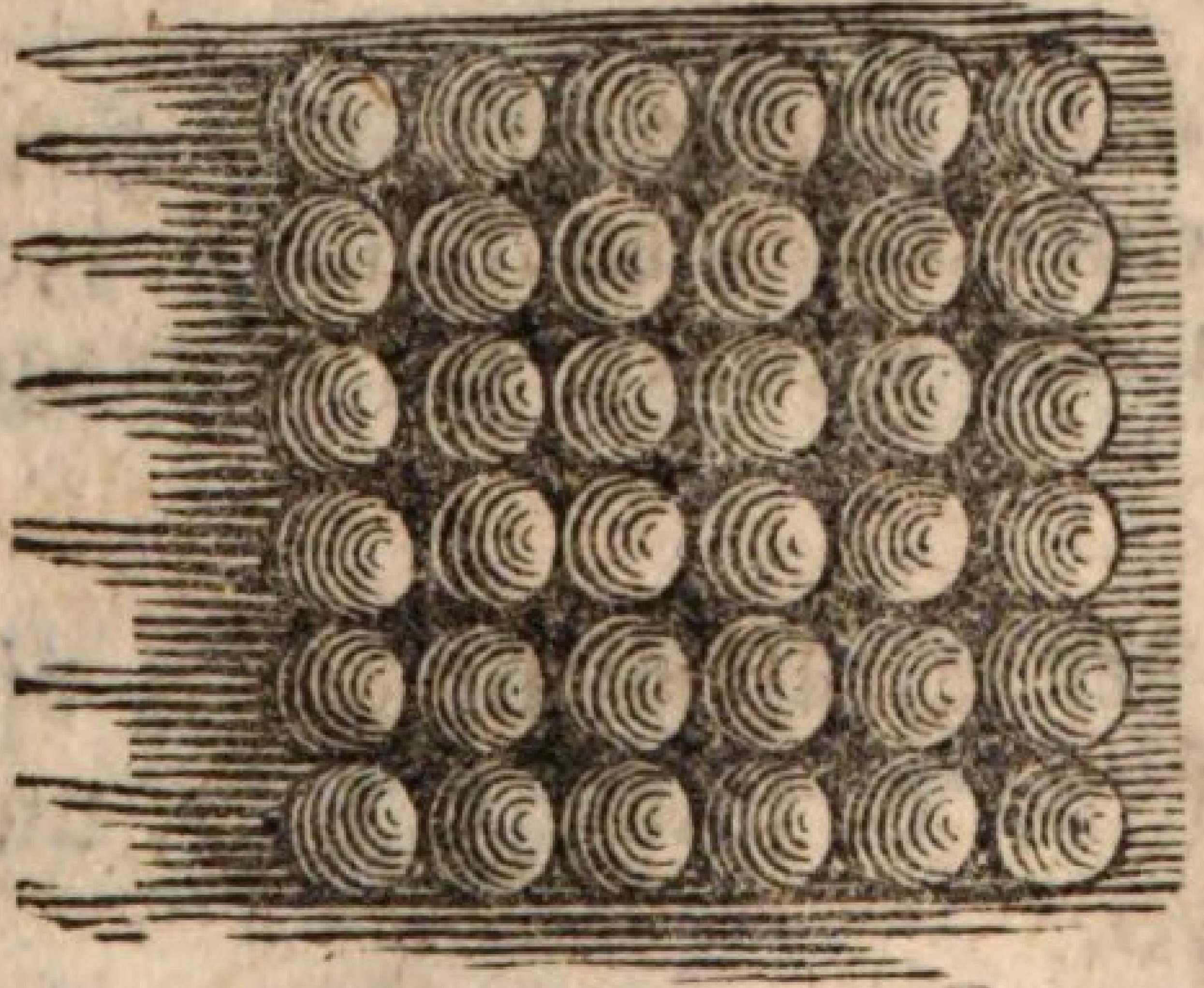
Nach §. 351 ist die allgemeine Formel einer Tetragonalzahl: n^2; wird diese Grösse summiret, d. i. als eine Summe vorgestellet (§. 408), so ist sie Sn^2, welche Formel, wie man nach §. 404 weiß, gleich ist: $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, mithin eine gemeine Tetragonalpiramidalzahl bedeutet.

Würden nun z. E. 6 gemeine Tetragonalzahlen (§. 350), so sich von 1 anfangen, gegeben, um solche zu summiren, so geschiehet es, wann $n = 6$ gehalten wird, also:

$$\begin{array}{rl} 2n^3 = & 432 \\ 3n^2 = & 108 \\ n = & 6 \\ \hline 6) & 546 \mid 91 \end{array}$$

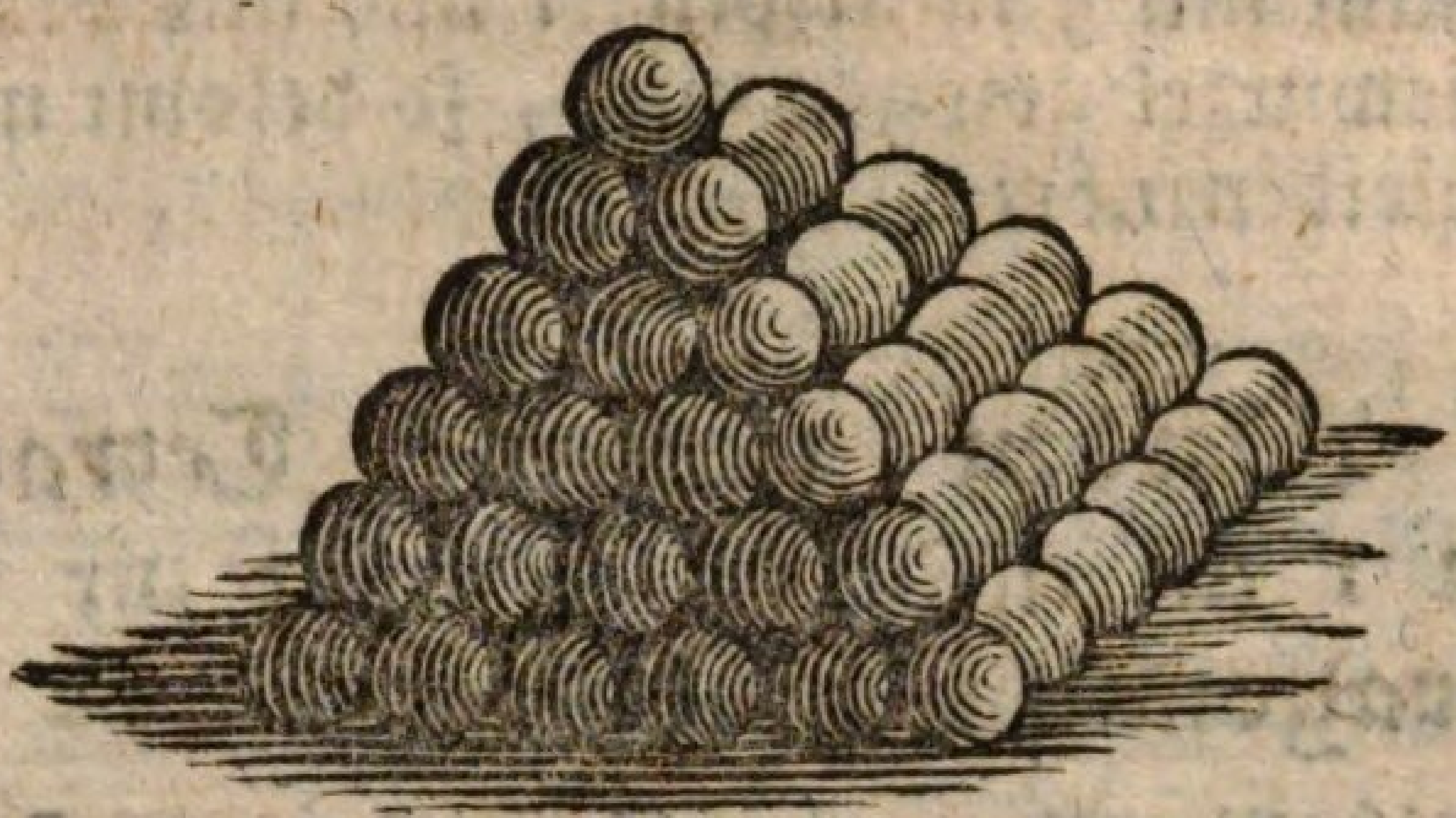
Ist die Tetragonalpiramidalzahl.

Mit dieser Zahl kan nun eine Figur formiret werden, davon die Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält 36 Kugeln, und also das sechste Glied einer Tetragonalzahl (§. 350).

Werden auf diese Grundlage 25 . 16 . 9 . 4 . 1 Kugeln, als die übrige Tetragonalzahlen, gesezet, so entstehet diese piramidenförmige Figur, über welche Zahl auch sonst allerlei Vorgaben componirt werden können.



§. 414. **Die Ausziehung der Wurzel wird nach §. 412 also verrichtet:**

Z. E. Es sei die vorige Tetragonalpiramidalzahl 91:

	91	
	3	
	273	6 Die Tetragonalpiramidalwurzel von 91.
Cubiczahl von 6 (§. 207):	216	
	57	Wird nicht geachtet.

Man hat an verschiedenen Münzen 55 Rthlr. am Werth; Fr. Da dieses eine Tetragonalpiramidalzahl ist, wie viel sind der Stüke, und was ist der Werth eines jeden Stükes? Antw. Der Stüke sind 5, und die Werthe sind: 1. 4. 9. 16 und 25 Rthlr.

Nachdem die Wurzel gezeigter Massen gefunden worden, so werden 5 Glieder einer Tetragonalzahl (§. 350), und durch die Addition derselben die Glieder der Tetragonalpiramidalzahl formirt.

Wie viel sind der Stükkugeln auf 4 vierekigten piramidenförmigen Hauffen, da solche 5. 6. 7. und 8 Kugeln hoch sind? Antw. 490.

Wann ein jeder Hauffe nach der allgemeinen Formel, wie vorhin, berechnet wird, so werden 55. 91. 140 und 204 Kugeln kommen.

§. 415. Addirt man etliche der gemeinen Pentagonalzahlen (§. 352) von 1 an, so komt zur Summe eine gemeine Pentagonalpiramidalzahl.

Nach §. 353 ist die Bezeichnung der gemeinen Pentagonalzahl: $\frac{3n^2 - n}{2}$, wird diese summiret (§. 408), so erhält man: $\frac{3Sn^2 - Sn}{2}$; weil nun bekanter Massen nach §. 404 $Sn^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, so folget, daß $3Sn^2$ dreimahl so viel sein müsse, nemlich: $\frac{6n^3 + 9n^2 + 3n}{6}$, davon die Grösse Sn, d. i. nach §. 401: $\frac{n^2 + n}{2}$, subtrahirt werden muß, mithin die Formel einer gemeinen Pentagonalpiramidalzahl diese ist: $\frac{6n^3 + 9n^2 + 3n}{6} - \frac{n2 - n}{2}$.

§. 416. Gleichwie aber §. 410 die Addition nach den Coefficienten gewisser geschehen, also wird hier die Subtraction ebenfals mit denselben leichter verrichtet, als:

Sn^2 ist $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§.403). Dieses ist hier dreifach, als: $3Sn^2 = n^3 + 1\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. hiervon wird nun Sn, das ist nach §.401: $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, subtrah.

Reduc. $n^3 + 1\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$

$\frac{n^3 + n^2}{2}$, welches mit 2 dividirt wird (§.410).

Mithin bedeutet diese Formel eine gemeine Pentagonalpiramidalzahl.

Wie groß müste nun also eine Pentagonalpiramidalzahl sein, wann man zu einer Seite, oder zu der Wurzel, 6, mithin $n = 6$, nehmen wolte?

Stehet also: $n^3 = 216$
$n^2 = 36$

2) 252 | 126 müste dieselbe sein.

§. 417. **Die Ausziehung der Wurzel geschiehet** nach §.412 also:

$$\begin{array}{r} 126 \\ \underline{2} \\ 252 \end{array} \mid 6 \text{ Ist die Wurzel.}$$

Cubiczahl von 6 (§. 207): $\underline{216}$

36 Wird nicht geachtet.

§. 418. **Werden etliche der gemeinen Hexagonalzahlen (§.355) von 1 an addirt, so komt zur Summe eine gemeine Hexagonalpiramidalzahl.**

Nach §. 356 ist die Bezeichnung der gemeinen Hexagonalpiramidalzahl: $\frac{4n^2 - 2n}{2}$, wird diese summirt (§. 408), so erhält man: $\frac{4Sn^2 - 2Sn^2}{2}$; weil nun, wie genugsam bekant, nach §. 416 $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, so ist dieses hier vierfach: als: $4Sn^2 = 1\frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n$, davon $2Sn^2$, das ist, zweimahl $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, subtrahirt wird.

Red. $\underline{1\frac{1}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3}n - n^2 - n}$

$\underline{1\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n}$ Dieses, um Ganze zu erhalten, mit 3 gegrössert.

$\frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6}$ Dieses solte mit 2 dividirt werden, und hernach der Quotient, wegen der Grösserung, mit 3 (§. 410); man verrichtet aber die Division auf einmahl mit 2mahl 3, nemlich 6.

Nimt man hier z. E. $n = 4$, so erhält man eine Hexagonalpiramidalzahl; dann solchemnach ist:

$$\begin{array}{rcr} 4n^3 & = & 256 \\ 3n^2 & = & \underline{48} \\ & & 304 \\ -n & = & \underline{4} \\ & 6) & 300 \end{array} \mid 50 \text{ Hexagonalpiramidalzahl.}$$

§. 419. Die Ausziehung der Wurzel geschiehet bekantlich nach §. 412 also:

	50	
	$1\frac{1}{2}$	
	75	4 Die Wurzel.
Cubiczahl von 4:	64	
	11	Wird nicht geachtet.

§. 420. Auf diese Art können nunmehro alle gemeine Piramidalzahlen gefunden werden, da die Bezeichnungen der folgenden Poliigonalzahlen, als: der Heptagonalzahl (§. 358), Octagonalzahl (§. 361) u. s. f. bekant sind.

II. Von den Centralpiramidalzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 421. Wann etliche der Centralpoliigonalzahlen (§. 364) von 1 an addirt werden, so komt zur Summe überhaupt eine Centralpiramidalzahl.

§. 422. Insbesondere erhält eine Centralpiramidalzahl ihren Beinahmen, eben wie §. 386, nach der Zahl, woraus sie entstanden, dergestalten, wann man Centraltrigonalzahlen (§. 367) addirt, eine Centraltrigonalpiramidalzahl, wann Centraltetragonalzahlen (§. 370) addirt werden, eine Centraltetragonalpiramidalzahl u. s. f. entstehet.

§. 423. Centralpiramidalzahlen aber werden solche Piramidalzahlen, wie aus dem Vorhergehenden bereits bekannt ist, genant, weil die Zahlen, woraus sie entstehen (§. 421), in Ansehung ihrer Figur (§. 366. 387), allemahl eine 1 in der Mitte haben, und gegenwärtig der Figur auch eine 1 in die Mitte komt.

§. 424.

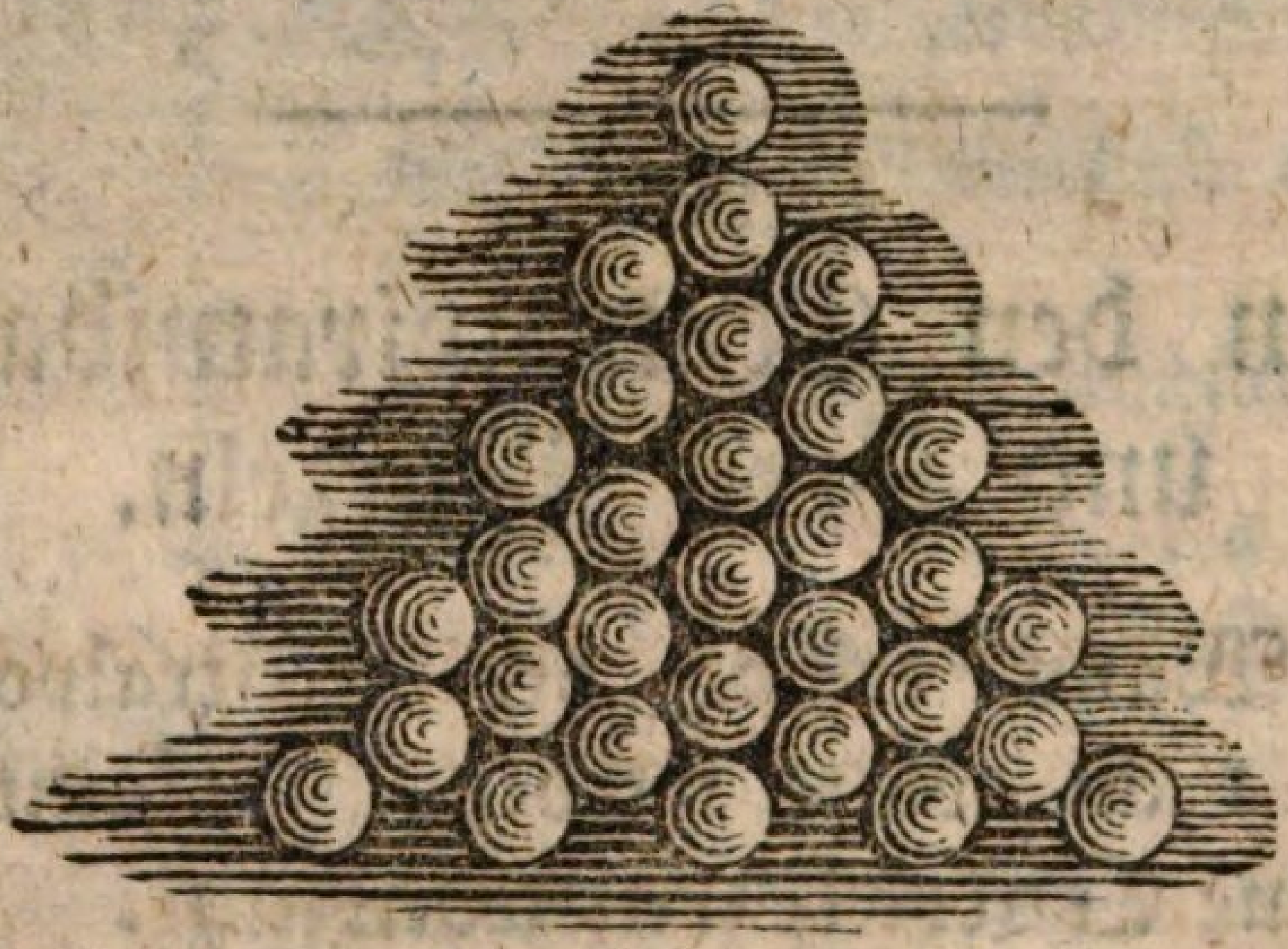
§. 424. Sol nun eine Centraltrigonalpiramidalzahl formiret werden, so werden von Centraltrigonalzahlen (§. 367. 368) von 1 an addirt, da dann die Summe eine Centraltrigonalpiramidalzahl ist.

Z. E. 1 . 4 . 10 . 19 . 31 . 46 . 64 . 85 u. s. f. sind Centraltrigonalzahlen.

Werden von diesen Gliedern addirt, so erhält man Centraltrigonalpiramidalzahlen, als:

$1 + 4 + 10 + 19 + 31 = 65$ Eine Centraltrigonalpiramidalzahl.

Mit dieser Zahl kan man eine dreiekigte piramidenförmige Figur bezeichnen, davon die Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält 31 Einten oder Kugeln, auf welche man 19, sodann 10, ferner 4, und endlich eine sezen, und somit eine piramidenförmige Figur formiren kan, welche Zahl auch auf andere Fälle applicabel ist.

Die Bezeichnung mit Buchstaben einer Trigonalzahl ist nach §. 368: $\frac{3n^2 - 3n}{2} + 1$.

Diese Formel wird nach §. 398 also summiret (§. 408): $\frac{3Sn^2 - 3Sn}{2} + S1$.

Nun ist, wie bekant (§. 409), $Sn^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$, folglichen $3Sn^2$ dreimahl so viel, nemlich: $\frac{6n^3 + 9n^2 + 3n}{6}$, und nach

nach §. ibid. ist $sn = \frac{n^2 + n}{2}$, mithin $3sn = \frac{3n^2 + 3n}{2}$, worzu $s1$ komt, welche Formel, nach §. 398, $= n$ ist.

Dahero ist die Formel einer Centraltrigonalpiramidalzahl also: $\frac{6n^3 + 9n^2 + 3n}{6} - \frac{3n^2 + 3n}{2} + n$, welche nun subtrahirt, und alsdann n addirt werden müste.

§. 425. Gleichwie aber §. 416 die Subtraction nach den Coefficienten geschehen ist, also wird hier dieselbige nach denselben auch zuverlässiger verrichtet, als:

sn^2 ist $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§. 403). Dieses ist hier dreifach, als: $3sn^2 = n^3 + 1\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$. hiervon muß nun sn, d. i. nach §. 401, $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, ebenfals 3mahl genommen, subtrahirt, und alsdann n addirt werden.

Reduc. $\frac{n^3 + 1\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}n^2 - 1\frac{1}{2}n}{n^3 - n}$, welches mit 2 dividirt, und zum Quotienten n addirt wird, also:

$\frac{n^3 - n}{2} + n$. Allgemeine Formel der Centraltrigonalpiramidalzahl.

Nota. Wann man die Brüche wegschaffen, und deswegen alle Glieder grössern wil, welches hier aber nicht nöthig war, so muß es vor der Reduction geschehen, und hernach nicht vergessen werden, mit der Grösserungszahl auch zu dividiren (§. 418).

§. 426. Hieraus erkennet man, daß zu einer jeden vorgegebenen Centraltrigonalpiramidalwurzel ihre Zahl gefunden werde, wann man von der Cubiczahl sothaner Wurzel die Wurzel selbst subtrahirt, den Rest durch 2 dividirt, und zu dem Quotienten die Wurzel wiederum addirt.

Z. E. Es sol n, als die Wurzel, oder, welches einerlei, die Seite, einer Centraltrigonalpiramidalzahl 7 sein, um die Piramidalzahl daraus zu suchen:

$$\begin{array}{r} n^3 = 343 \\ -n = -7 \\ \hline 2)\ 336 \mid 168 \\ +7 \\ \hline 175 \end{array}$$

175 ist die Zahl.

§. 427. **Die Aufsuchung der Wurzeln** geschiehet zwar sonst mittelst der Gleichungen (§. 17), man kan solche aber ohne dieselbige auf eine leichte und ganz natürliche Art finden.

Z. E. Ein eingefallener Hauffe gleicher Stükkugeln von 175 solte wiederum im Dreiek piramidenförmig also aufgesezet werden, daß eine Kugel gleich Anfangs in die Mitte geleget würde. Fr. Wie viel müsten auf eine Seite geleget werden?

Weil man nach §.424 weiß, daß die Summen von Centraltrigonalzahlen, wann sie von 1 an addirt werden, Centraltrigonalpiramidalzahlen bringen, so darf man jene nur so lange addiren, bis man die Zahl finde. Die Glieder sind alsdann die Seiten oder Wurzel (§. 347 u. f.), als:

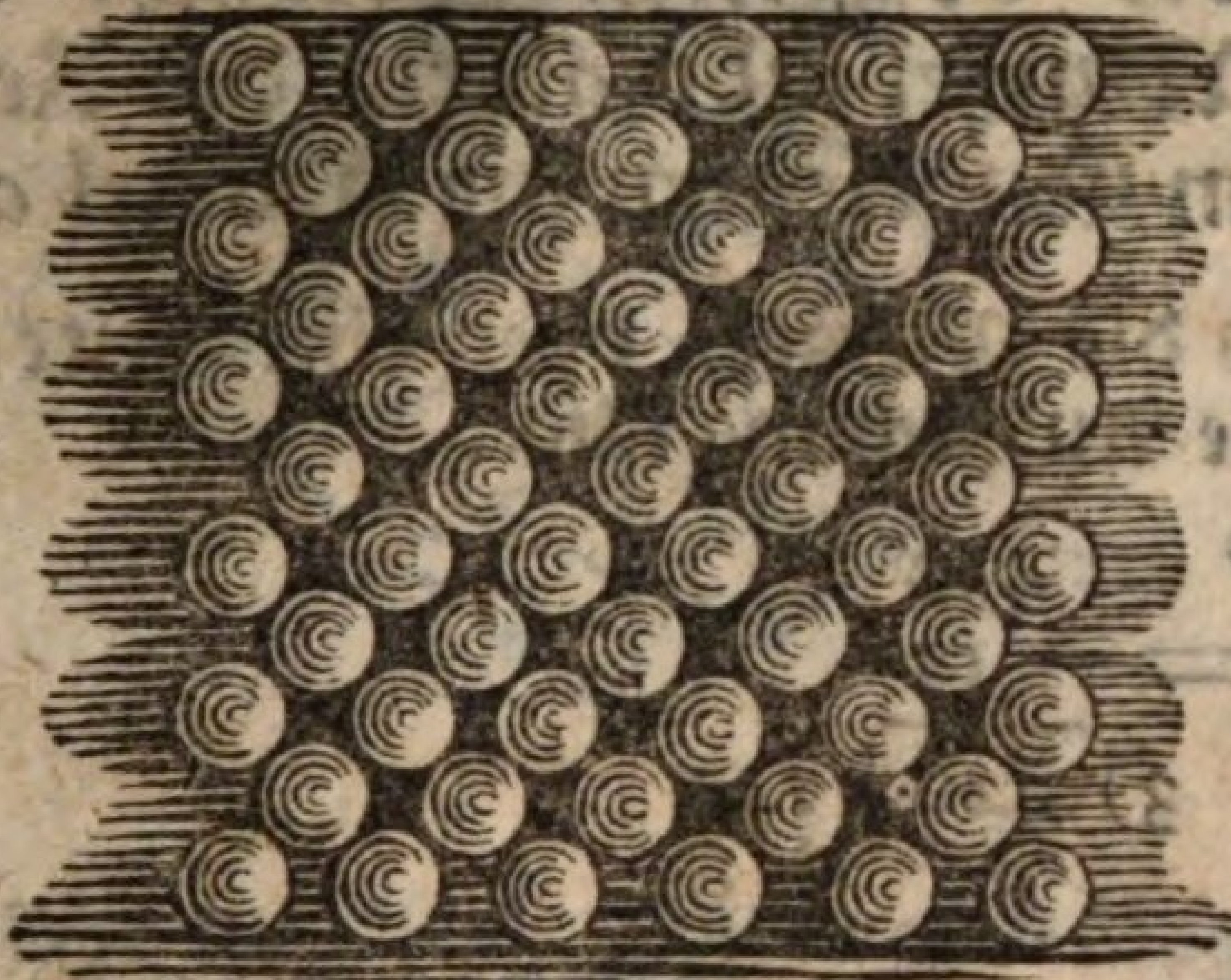
1.4.10.19.31. 46. 64 u.s.f. Centraltrigonalzahlen (§. 368).
1.5.15.34.65.111. 175 Centraltrigonalpiramidalzahlen, worunter die Lezte die Gegebene ist; und da der Glieder 7 sind, so müste auch eine Seite aus 7 Kugeln bestehen.

§. 428. **Werden Centraltetragonalzahlen** (§.370) von 1 an addirt, so komt zur Summe eine **Centraltetragonalpiramidalzahl.**

Z. E. 1. 5. 13. 25. 41. 61. 85. 113 u. s. f. sind Centraltetragonalzahlen, von welchen addirt werden, als:

$1 + 5 + 13 + 25 + 41 + 61 = 146$ Eine Centraltetragonalpiramidalzahl.

Mit dieser Zahl kan eine vierekigte piramidenförmige Figur bezeichnet werden, deren Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält 61 Einten oder Kugeln, auf welche man 41. 25. 13. 5. 1 sezen, und eine piramidenförmige Figur formiren, im übrigen aber auch auf andere Vorgaben anwenden kan.

Die Bezeichnung mit Buchstaben einer Centraltetragonalzahl ist nach §. 370: $\frac{4n^2 - 4n}{2} + 1$, oder ohne Division: $2n^2 - 2n + 1$.

Diese wird summirt (§. 398): $2Sn^2 - 2Sn + S1$.

Da nun nach §. 425 $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, so ist
$2Sn^2 = \frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n$, wovon Sn, das ist nach §. 401: $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, ebenfals 2mahl genommen, nemlich: $n^2 + n$, subtrahirt werden, und zum Rest $S1$, das ist, nach §. 398, n addirt werden muß, also:

$\frac{2}{3}n^3 + n^2 + \frac{1}{3}n - n^2 - n$ Mit 3 gegrössert.

Red. $2n^3 + 3n^2 + n - 3n^2 - 3n$

$2n^3 - 2n$ Dieses wird nur mit der Grösserungszahl 3 dividirt, weil die Centraltetragonalzahl: $2n^2 - 2n + 1$ keinen Divisoren hat.

$\frac{2n^3 - 2n}{3} + 1$ Allgemeine Formel der Centraltetragonalpiramidalzahl.

§. 429.

§. 429. Hieraus erhellet, daß zu einer jeden gegebenen Centraltetragonalpiramidalwurzel die Zahl gefunden werde, wann von der doppelten Cubiczahl der Wurzel, die doppelte Wurzel subtrahirt, der Rest mit 3 dividirt, und zum Quotienten die Wurzel addirt wird.

Z. E. n, als die Wurzel, oder eine Seite, sol sein $= 6$, so geschiehet die Aufsuchung also:

$$\begin{array}{rrl} 2n^3 & = 432 & \\ -2n & = -12 & \\ 3) & 420 & | \; 140 \\ & 1 & \;\; +6 \\ & & 146 \end{array}$$

146 Ist die Centraltetragonalpiramidalzahl.

§. 430. Die Aufsuchung der Wurzeln geschiehet eben auf die Art, wie §. 427 gezeiget worden; dann da nach §. 428 bekant ist, daß eine Centraltetragonalpiramidalzahl entstehe, wann Centraltetragonalzahlen addirt werden, so dürffen nur diese so lange addirt werden, bis man jene Zahl findet, wobei die Anzahl der Glieder die Wurzel anzeigen.

Z. E. Es würde die vorige Centraltetragonalpiramidalzahl: 146, gegeben, um die Wurzel aus derselben zu ziehen:

1. 5. 13. 25. 41. 61. 85. 113 u.s.f. Centraltetragonalzahlen.

$1+5=6+13=19+25=44+41=85+61=146$;

weil nun 6 Centraltetragonalzahlen die Piramidalzahl: 146, machen, so ist auch 6 die Wurzel.

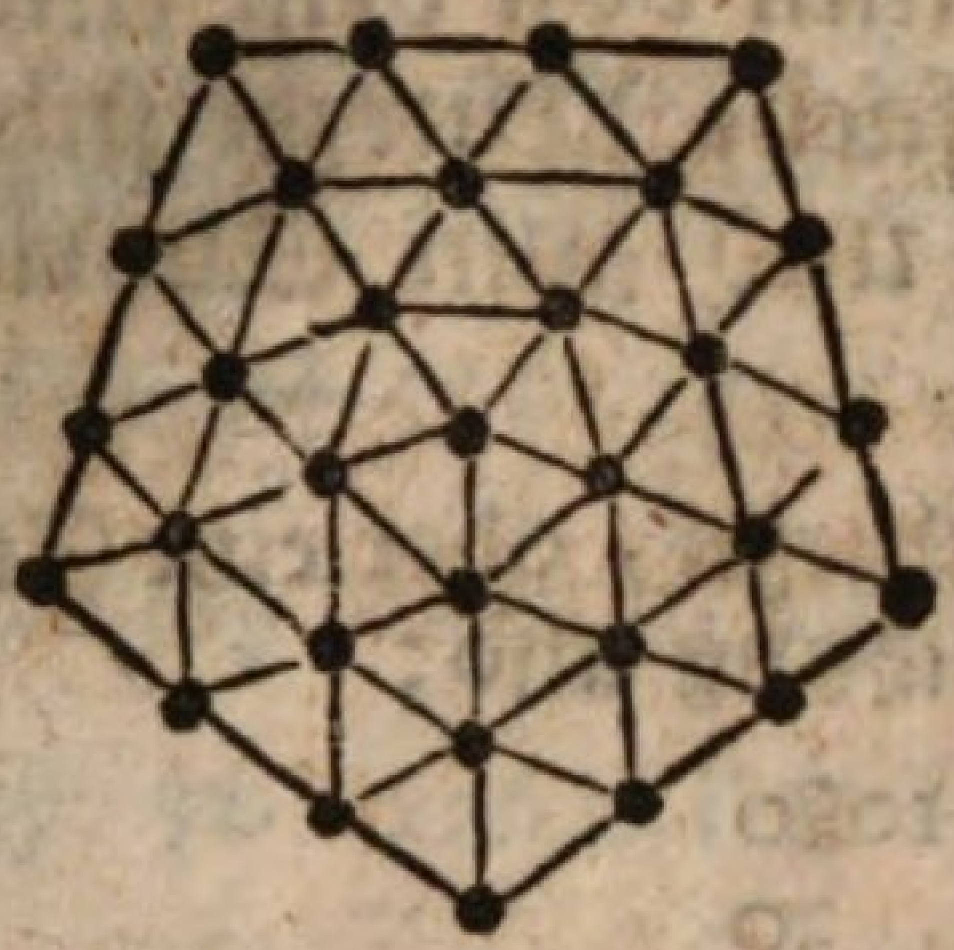
§. 431. Addirt man Centralpentagonalzahlen (§. 372) von 1 an, so komt zur Summe eine Centralpentagonalpiramidalzahl.

Z. E. 1. 6. 16. 31. 51. 76. 106 u. s. f. sind Centralpentagonalzahlen, von welchen addirt werden, als:

$1+6+16+31=54$ Eine Centralpentagonalpiramidalzahl.

Mit

Mit dieser Zahl kan eine fünfekigte piramidenförmige Figur bezeichnet werden, deren Grundlage also ist:



Diese Grundlage enthält 31 Einken oder Kugeln, auf welche man 16. 6 und 1 sezen, und eine piramidenförmige Figur formiren, im übrigen aber auch auf andere Vorgaben anwenden kan.

Die Bezeichnung mit Buchstaben einer Centralpentagonalzahl ist nach §. 372: $\frac{5n^2 - 5n}{2} + 1$.

Diese wird summirt (§. 398): $\frac{5Sn^2 - 5Sn}{2} S1$.

Da nun nach §. 425, $Sn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, so ist
$5Sn^2 = 1\frac{2}{3}n^3 + 2\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{6}n$, wovon Sn, das ist, nach §. 401, $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, ebenfals 5 mahl genommen, nemlich: $2\frac{1}{2}n^2 + 2\frac{1}{2}n$, subtrahirt werden, und zum Rest $S1$, das ist, nach §. 398, n, addirt werden muß, also:

$1\frac{2}{3}n^3 + 2\frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{6}n - 2\frac{1}{2}n^2 - 2\frac{1}{2}n$ Um die Brüche wegzuschaffen, wird mit 6 gegrössert.

Red. $10n^3 + 15n^2 + 5n - 15n^2 - 15n$

$10n^3 - 10n$ Dieses muß nun erst mit 2, und alsdann mit der Grösserungszahl, d. i. mit 6, mithin mit 12, dividirt werden (§. 418).

2) $\frac{10n^3 - 10}{12}$, welches wieder mit 2 gekleinert werden kan.

$\frac{5n^3 - 5n}{6} + n$.

§. 432. Hierbei erkennet man, daß zu einer beliebigen Wurzel, oder Seite, die Centralpentagonalpiramidalzahl gefunden werde, wann von dem fünffachen Cubus der Wurzel die fünffache Wurzel subtrahirt, der Rest mit 6 dividirt, und zum Quotienten die Wurzel addirt wird.

Z. E. n, als die Wurzel, oder eine Seite, sol sein $= 6$, so geschiehet die Aufsuchung also:

$$5n^3 = 1080$$
$$-5n = 30$$
$$6)\ 1050 \mid 175$$
$$43 \quad + 6$$

181 Ist die Centralpentagonalpiramidalzahl.

§. 433. Die Aufsuchung der Wurzeln geschiehet, wie vorhin §. 430 gezeiget worden, wann nemlich Centralpentagonalzahlen so lange addirt werden, bis man die gegebene Piramidalzahl erhält.

§. 434. Auf die bisher gezeigte Weise können alle folgende grössere Centralpiramidalzahlen gefunden, und ihre Wurzeln ausgezogen werden, folglichen würde überflüssig sein, dieselbige weiter fortzusezen.

§. 435. Nun ist noch anzuzeigen, daß die Piramidalzahlen in Geschlechter eingetheilet werden, also, daß man zum ersten Geschlecht die gemeine- und Centralpiramidalzahlen zählet (§. 396 u. f.); zum zweiten Geschlecht, welche aus den Summen jener Piramidalzahlen entstehen; zum dritten Geschlecht, welche wiederum aus den Summen dieser Zahlen entstehen u. s. w.

§. 436. Wann also gemeine Trigonal- Tetragonal- Pentagonalpiramidalzahlen (§. 396 u. f.) addirt werden, so erhält man gemeine Trigonal- Tetragonal- Pentagonalpiramidalzahlen vom zweiten Geschlecht.

Z. E.

Z. E. 1. 4. 10. 20. 35. 56 u. s. f. sind gemeine Trigonalpiramidalzahlen.

Werden davon 2. 3. 4 u. s. f. addirt, so erhält man gemeine Trigonalpiramidalzahlen vom zweiten Geschlecht, als:

$1+4=5$, $1+4+10=15$, $1+4+10+20=35$.

Die aufsteigende Ordnung davon ist also:

1. 5. 15. 35. 70. 126 u. s. f.

§. 437. **Werden Centraltrigonal- Tetragonal- Pentagonalzahlen (§. 421 u. f.) addirt,** so erhält man Centraltrigonal- Tetragonal- Pentagonalzahlen u. s. f. vom zweiten Geschlecht u. s. f. (§. 435).

Von den

abgekürzten Piramidalzahlen, und ihren Wurzeln.

§. 438.

Wann eine Summe von gemeinen Poliigonalzahlen (§. 393 u. f.) nicht von 1 anfängt, sondern von dem zweiten, dritten vierten Glied u. s. f. angefangen ist, so heisset solche im ersten Fall eine einmahl, im zweiten Fall eine zweimahl, im dritten Fall eine dreimahl abgekürzte gemeine Piramidalzahl.

Z. E. 1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 u. s. f. sind gemeine Trigonalzahlen (§. 396). Werden nun solcher vom zweiten, dritten, vierten Glied an u. s. w. verschiedene addirt, so erhält man eine abgekürzte Trigonalpiramidalzahl, als:

3 + 6 bringt 9 zur einmahl abgekürzten Piramidalzahl.

Item: 6 + 10 + 15 giebt 31 zur zweimahl abgekürzten Piramidalzahl u. s. f.

§. 439. Wird eine abgekürzte Piramidalzahl gegeben, so muß natürlicher Weise dabei angezeiget werden, ob sie trigonal, tetragonal u. s. f. sei, und, entweder wie vielmahl solche abgekürzet, oder, wie viel eine Seite in der Grundlage enthalte, worauf dieselbige nach dem Vorhergehenden ergänzet, die fehlende Glieder gefunden, und die Wurzel gesuchet werden kan.

Z. E.

Z. E. Es sei eine dreimahl abgekürzte Tetragonalpiramidalzahl 77, oder es würden so viel gleiche Stükkugeln gegeben, um solche in Form einer vierekigten Piramide also aufzuhäuffeln, daß von der Spize an drei Lagen fehleten, so ist die Frage: Wie viel deren fehlen, und wie viel in der Grundlage auf eine Reihe kommen müssen?

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49 u. s. f. sind Tetragonalzahlen (§. 350). Weil nun der Piramide drei Lagen, d. i. 9. 4. 1, mithin 14 fehlen sollen, und 16 + 25 + 36 = 77, die ganze Piramide aber aus 6 Lagen oder Glieder bestehet, so müssen auf eine Seite in der ersten oder Grundlage 6 kommen.

Item: Wann zu einer fünfekigten Piramide eine Seite der Grundlage 6 sein sol, wie viel Lagen fehlen in der Höhe, da nur 108 Kugeln vorhanden sind?

Weil eine Seite 6 sein sol, so muß die Piramide aus 6 Lagen bestehen, das sind 6 Glieder oder gemeine Pentagonalzahlen, als:

1. 5. 12. 22. 35. 51, gemeine Pentagonalzahlen (§. 352), welche 126 zusammen machen, weil aber nur 108 vorhanden sind, so fehlen 18, mithin 3 Lagen, nemlich: 12. 5. 1.

§. 440. Gleiche Bewandnis hat es mit den abgekürzten Centralpiramidalzahlen, da man sich hierzu wie vorhin der gemeinen, also hier der Centralpoliigonalzahlen (§. 367 u. f.), bedienet.

Z. E. 1. 4. 10. 19. 31. 46 u. s. f. sind Centraltrigonalzahlen (§. 368). Werden nun solcher vom zweiten, dritten, vierten Glied an u. s. f. verschiedene addirt, so erhält man eine abgekürzte Centraltrigonalpiramidalzahl, als:

4 + 10 bringt 14 zur einmahl,

item: 10 + 19 + 31 giebt 60 zur zweimahl abgekürzten Centraltrigonalpiramidalzahl u. s. f.

§. 441. Wird eine abgekürzte Centralpiramidalzahl gegeben, um die Wurzel aus derselben zu suchen, so muß

dabei eben dasjenige angezeiget werden, was §. 439 gesaget worden.

Z. E. Es sei eine dreimahl abgekürzte Centraltetragonalpiramidalzahl 127, oder es würden so viel gleiche Stükkugeln gegeben, um solche in Form einer vierekigten Piramide also aufzuhäuffeln, daß in der Grundlage eine Kugel in die Mitte komme, und von der Spize an drei Lagen fehleten, so ist die Frage: Wie viel deren in der Grund- oder ersten Lage auf eine Reihe, d. i. von einem Ek zum andern, und von der mitlern Kugel zu jedem Ek (§. 366), kommen müssen?

1. 5. 13. 25. 41. 61. 85 u. s. f. sind Centraltetragonalzahlen (§. 370).

Weil nun der Piramide drei Lagen, d. i. 13. 5. 1, mithin 19, fehlen sollen, und 25 + 41 + 61 = 127, die ganze Piramide aber aus 6 Lagen oder Gliedern bestehet, so müssen in der Grundlage auf eine Seite und von jedem Ek ins Centrum 6 kommen.

Item: Wann zu einer fünfekigten Centralpiramide eine Seite der Grundlage, und von einem jeden Ek ins Centrum, 6 sein sol, wie viel Lagen fehlen in der Höhe, da nur 158 Kugeln vorhanden sind?

Weil eine Seite 6 sein sol, so muß die Piramide auch 6 Lagen haben, das sind Centralpentagonalzahlen, als:

1. 6. 16. 31. 51. 76 Centralpiramidalzahlen (§. 372), welche zusammen 181 machen; weil aber nur 158 vorhanden sind, so fehlen 23, mithin 3 Lagen, nemlich: 16. 6. 1.

Von

Von den Proniczahlen, und ihren Wurzeln.

Diese Zahlen solten zwar ohnmittelbar auf die Tetragonal- oder Quadratzahlen (§. 350) folgen; weil man aber den Zusammenhang der folgenden Zahlen nicht unterbrechen wolte, so ist dieselbige bis hieher verschoben worden.

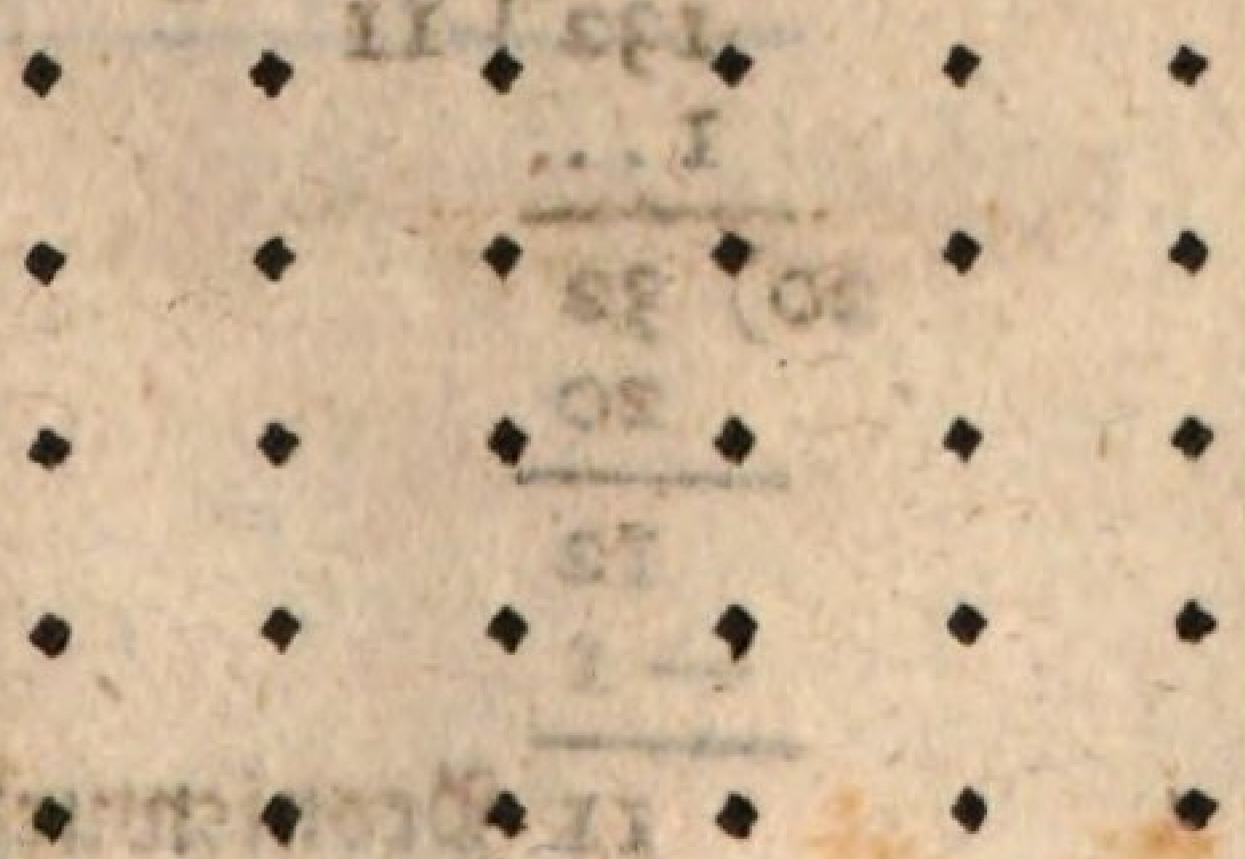
---

§. 442.

Wann zu einem Quadrat die Wurzel addirt wird, so heisset die Summe eine Proniczahl, und die addirte Quadratwurzel alsdann die Proniczwurzel.

Z. E. Die Quadratzahl sei: 25
$+ 5$ Die Wurzel.
30 Proniczahl.

Mit dieser Zahl kan folgende Figur bezeichnet werden:



Die Bezeichnung mit Buchstaben ist also:

$$a^2 + a$$

Ist aber die Wurzel $a - 2$, so ist die Pronicgrösse:

$$a^2 - 3a + 2$$

dann diese entstehet also:

$$\begin{array}{rl} & a - 2 \\ & a - 2 \\ \hline & -2a + 4 \\ & a^2 - 2a \\ \hline \text{Red.} & a^2 - 4a + 4 + a - 2 \\ \hline & a^2 - 3a + 2 \end{array}$$

§. 443. **Die Wurzel wird aus einer Proniczahl gefunden, wann man aus selbiger die Quadratwurzel ziehet, da dann der Rest die Pronicwurzel ist.**

Z. E. Die Pronicgrösse wäre: $a^2 + a$, so ist die Ausziehung der Wurzel:

$$\begin{array}{l} a)\ a^2 + a \mid a \\ -a^2 \\ \hline \quad a \text{ ist die Wurzel.} \end{array}$$

Resolution:

Wann $a = 11$, so ist $a^2 = 121$

$$\begin{array}{rl} a = & 11 \\ \hline & 132 \text{ Proniczahl.} \\ & 132 \mid 11 \\ & 1.. \\ \hline 20) & 32 \\ & 20 \\ \hline & 12 \\ & -1 \\ \hline & 11 \text{ Pronicwurzel.} \end{array}$$

Item:

Item: Die Pronicgrösse sei: $a^2 - 3a + 2$, so wird die Wurzel also ausgezogen:

$$
\begin{array}{l}
a)\ a^2 - 3a + 2 \mid a - 2 \\
\underline{-a^2} \\
2a)\ -3a + 2 \\
\quad\ \underline{+4a} \\
\qquad a + 2 \\
\qquad\ \underline{-4} \\
\qquad a - 2 \text{ ist die Wurzel.}
\end{array}
$$

Hier wurde vorausgesezt, daß die vorhandene Grösse eine würkliche Pronicgrösse sei, mithin zum Rest die Wurzel kommen müsse; weil aber das zweite Glied: $-3a$, mit dem doppelten ersten Wurzelglied (§.188) nicht gerade dividirt werden konte, so offenbahrte sich, daß die Grösse reducirt worden, dahero dem zweiten Glied: $-3a$, in Gedanken Eins zugesezet, und also die rechte Wurzel erhalten wurde.

Resolution:

Wann $a = 8$, so ist $a^2 = 64$

$$
\begin{array}{r}
-3a = 24 \\
\hline
40 \\
+2 \\
\hline
42
\end{array}
$$

42 Pronicgrösse, hieraus die Quadratwurzel, welche ist 6, bleiben 6, als die Pronicwurzel, übrig.

Wil man die Proniczahl mit Ziffern, gleichwie mit den Buchstaben, suchen, so ist die Wurzel vorhin 6, d. i. $8 - 2$, welche also multiplicirt wird:

$$
\begin{array}{rl}
& 8 - 2 \\
& 8 - 2 \\
\hline
& -16 + 4 \\
& 64 - 16 \\
\hline
\text{Reduc.} & 64 - 32 + 4 + 8 - 2 \\
\hline
& 64 \\
& +4 \\
& +8 \\
\hline
& 76 \\
& -32 \\
\hline
& 44 \\
& -2 \\
\hline
& 42 \text{ Die Pronicwurzel.}
\end{array}
$$

Nimt man aber für — 2 einen Buchstaben, so wird die Sache noch deutlicher.

$$
\begin{array}{rl}
 & a - b \\
 & a - b \\
\hline
 - & ab + b^2 \\
a^2 - ab & \\
\hline
a)\ a^2 - 2ab + b^2 + a - b & |\ a - b \\
- a^2 & \\
\hline
2a)\ - 2ab + b^2 + a - b & \\
+ 2ab & \\
\hline
b^2 + a - b & \\
- b^2 & \\
\hline
a - b & \text{Rest, als die Wurzel.}
\end{array}
$$

Ein Schreiner solte ein Tischlein machen, das just 272 Quadratzoll hielte, und einen Zoll schmäler, als lang sei. Fr. Wie lang und breit hätte er solches machen müssen? Antw. 16 Zoll breit, und 17 Zoll lang.

Die Quadratwurzel aus 272 ist 16, und bleiben 16 übrig; werden diese zu einer Seite des Quadrats gethan, so werden die Nebenseiten um einen Zoll länger, wie solches aus der Figur §. 442 zu ersehen ist.

182 Pflanzen waren also ins Viereck gesezet, daß in der Länge eine Pflanze mehr, als auf der Seite stund. Fr. Wie viel stunden derselben in der Länge und Breite? Antwort: 14 Pflanzen stunden in der Länge, und 13 in der Breite.

Von den

Logarithmen.

§. 444.

Es gehöret zwar die Lehre von den Logarithmen hauptsächlich zu der Anwendung der gemeinen Arithmetic; weil sich aber auch bei der Algebra Fälle ereignen können, welche die Begriffe von den Logarithmen erfordern, so sol von der Beschaffenheit und dem Gebrauch derselben hier das Nöthige angezeiget werden.

§. 445. Wann eine arithmetische Progression (§. 312), die sich von 0 anfängt, und eine geometrische Progression (§. 322), welche ihren Anfang von 1 nimt, miteinander fortgehen, so werden die Glieder der arithmetischen Progression, Logarithmen der Glieder der geometrischen Progression genennet.

Z. E. Es sei der Unterschied bei der arithmetischen Progression 2, und bei der geometrischen Progression der Exponent auch 2, so gehen beide Progressionen also miteinander fort:

0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20 u. s. f.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024 u. s. f.

Oder: Der Unterschied sei 1, und der Exponent 3:

0. 1. 2. 3. 4. 5 6 7. 8. 9 u. s. f.
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683 u. s. f.

§. 446. Der Gebrauch der Logarithmen bestehet darinnen, daß man durch Hülffe derselben das Multipliciren durch Addiren, das Dividiren durch Subtrahiren, das Erheben zu Potenzen (§. 29) durch ein leichtes Multipliciren, und die Ausziehung der Quadrat- und Cubicwurzeln (§. 158. 205) durch ein vortheilhaftes Dividiren verrichten kan.

§. 447. Wann man also zwo Zahlen miteinander multipliciren wil, so werden derselben Logarithmen nur addirt, die Summe ist alsdann der Logarithmus, welcher das Product anzeiget.

Z. E. Man wolte nach der ersten Tabelle 16 und 64 miteinander multipliciren, so werden deren Logarithmen, nemlich 8 und 12, addirt, da dann die Summe 20 der eigentliche Logarithmus ist, der das Product 1024 anzeiget.

Oder: Nach der andern Tabelle 243 und 27, so thun deren beide Logarithmen 3 und 5 die Summe 8, welche das Product 6561 anzeiget.

§. 448. Sol eine Zahl dividirt werden, so wird der Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividenden subtrahirt, der Unterschied ist alsdann der eigentliche Logarithmus, welcher den Quotienten anzeiget.

Z. E. Es solte die Zahl 243 durch 27 dividirt werden, so erhält man durch die Subtraction deren Logarithmen, welche 3 und 5 sind, den eigentlichen Logarithmus 2, der den Quotienten 9 angiebt.

§. 449. Wil man eine Zahl quadriren, so wird derselben Logarithmus duplirt, das Factum ist alsdann der Logarithmus, welcher das Quadrat anzeiget.

Z. E. Die Zahl 81 solte quadrirt werden, so wird ihr Logarithmus, welcher 4 ist, duplirt, wodurch zum eigentlichen Logarithmus 8 komt, welcher die Quadratzahl 6561 bekant macht.

§. 450. Auf gleiche Weise wird eine Zahl zur dritten, vierten und höhern Potenz erhaben, wann ihr Logarithmus 3, 4, und mehrfach genommen wird.

§. 451. Sol aus einer Zahl die Quadratwurzel gezogen werden, so wird derselben Logarithmus mit 2 dividirt, der Quotient ist alsdann der Logarithmus zur Quadratwurzel.

Z. E. Aus der Zahl 6561 solte die Quadratwurzel gezogen werden, so würde deren Logarithmus, welcher hier 8 ist, mit 2 dividirt, da dann der Quotient 4 der Logarithmus wäre, der die Quadratwurzel, nemlich 81, anzeigte.

§. 452. Auf eben diese Weise werden die Wurzeln aus höhern Potenzen gezogen, wann man den Logarithmus mit dem Exponenten dividirt.

§. 453. Aus der bisherigen Vorstellung erkennet man nun zwar die Art und Weise der Logarithmen, und ihren Gebrauch; alleine wie zu allen Zahlen, wie solche in der Ordnung aufeinander folgen, mithin auch zu denenjenigen, welche zwischen die Glieder einer geometrischen Progression fallen, die Logarithmen gefunden werden, solches erfordert eine besondere Mühe und Wissenschaft.

§. 454. Gleichwie aber das ganze Zahlgebäude, oder die Rechenkunst, auf die Zahl 10 gegründet und eingerichtet ist, also pfleget man bei den Logarithmen das Verhältnis der geometrischen Progression zu 10 anzunehmen, und hierzu sich der arithmetischen Progression, deren Unterschied 1 ist, zu bedienen, also:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6	u. s. f.
1.	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000	u. s. f.

§. 455. Dieses sind nach gegenwärtig angenommenen Progressionen die Hauptzahlen, bei welchen man sich die

Zwischen=

Zwischenzahlen der geometrischen Progression, zu denen noch die Logarithmen gehören, also vorstellen kan:

0.	1.	2.	3.	
1. 2. 3 bis 9.	10. 11. 12 bis 99.	100. 101. bis 999.	1000 bis 1001	u. s. f.

§. 456. Hierbei ist offenbar, daß zu allen Zahlen, so zwischen 1 und 10 befindlich, die Logarithmen zwischen 0 und 1, mithin mehr als 0, weniger aber als 1, und also Brüche, sein müssen, ingleichen zu allen Zahlen, welche zwischen 10 und 100 befindlich, die Logarithmen zwischen 1 und 2 fallen, mithin mehr als 1, weniger aber als 2, und also 1 und Brüche, enthalten müssen u. s. f.

§. 457. Weil es aber nicht möglich ist, die Logarithmen der Zwischenzahlen in gemeinen Brüchen vorzustellen, so hat man dieselbige überhaupt in Decimaltheilen (§. 167) angenommen, davon Folgendes anzumerken nöthig ist:

§. 458. **Decimaltheile** sind diejenige Theile, da man Eins in 10. 100. 1000. 10000. 100000 u. s. f. theilet, und nach sothanen Theilen die Rechnung anstellet.

§. 459. Demnach wird eine 1, oder die Einten einer Zahl, durch Anhängung einer Null in zehn, durch 2 Nullen in 100, durch 3 Nullen in 1000, durch 4 Nullen in 10000 Decimaltheile getheilet oder resolviret, mithin je mehr man Nullen beifüget, je mehr und je kleiner die Theile, ja endlich so klein werden, daß ein oder etliche Theilgen in der Berechnung für **Nichts** mehr zu achten sind (§. 167 u. f.).

§. 460. Werden sothane **Decimaltheile** bezeichnet, so wird deren Zahl wie eine gemeine Zahl geschrieben, und der Nenner weggelassen, jedoch muß die Zahl so viele Stellen, als der Nenner haben, oder als die Benennung erfordert, wovon die erste Ziffer oder Null durch ein Comma oder einen Punct von den andern abgesondert wird.

Z. E. $\frac{85}{100}$ werden geschrieben: 0, 85.
$\frac{45}{1000}$ also: 0, 045.
$\frac{325}{10000}$ also: 0, 0325.

Item: $1\frac{85}{100}$ folgendermassen: 1, 85.
$2\frac{45}{1000}$ also: 2, 045.
$3\frac{325}{10000}$ also: 3, 0325.
$3\frac{25}{10000}$ also: 3, 0025 u. s. f.

§. 461. Dabei versteht es sich von selbsten, daß die Ziffern der Decimaltheilen, eben wie die Ziffern der ganzen Zahlen, von der Rechten zur Linken zehnfach wachsen, und von der Linken zur Rechten zehnfach abnehmen.

Z. E. Die Ziffern der Decimaltheilen: 0, 3054071 bedeuten nach ihren Stellen, von der Rechten zur Linken: $\frac{1}{10000000}$, $\frac{7}{1000000}$, $\frac{0}{100000}$, $\frac{4}{10000}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{0}{100}$, $\frac{3}{10}$.

Werden diese Brüche addirt, so komt die ganze Zahl der Theilen wieder heraus.

§. 462. Wie nun aus den Decimaltheilen die Logarithmen zu den Zwischenzahlen (§. 456) gefunden werden, davon findet man in des Herrn von Wolf Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften, I. Th. pag. 272. zwar eine gründliche, aber dabei überaus mühsame und weitläuftige Anweisung.

§. 463. Dieser Mühe aber kan man auch überhoben sein, da sich verschiedene berühmte Männer derselben vorlängst unterzogen, und weitläuftige Tabellen, zu ihrem grossen Ruhm, verfertiget haben.

§. 464. Dahero ist nur nöthig, den vortreflichen Gebrauch bemeldter Tabellen zu zeigen, als worzu man des Herrn Professor Briggius zu Oxfort Verfertigte, so im II. Th. des mathemat. Lexicons pag. 135 befindlich, und auch a part abgedrukt zu haben sind, erwählet hat.

§. 465.

§. 465. Zuvörderst ist zu merken, daß die erste Ziffer eines Logarithmus, so von den andern unterschieden ist, und woraus man erkennet, ob und wie viel Ganze der Logarithmus enthalte (§. 460), Characteristica, oder Kennzahl, genant werde.

Z. E. In vorbemeldter Tabelle ist der Logarithmus zu 2 also ausgedrukt: 0. 3010300, wobei die Kennzahl 0 ist, und zu erkennen giebt, daß dieser Logarithmus kein Ganzes betrage, sondern in dem Bruch $\frac{3010300}{10000000}$ bestehe.

Item: Der Logarithmus zu 10 ist: 1. 0000000, wobei die Kennzahl 1, und der Logarithmus just ein Ganzes ist.

Item: Der Logarithmus zu 11 ist: 1. 0413927.

Item: Zu 101 ist er: 2. 0043214.

Item: Zu 1005 ist er: 3. 0021661.

Item: Zu 10011 ist er: 4. 0004775.

§. 466. Aus gedachter Kennzahl erkennet man sogleich, aus wie viel Ziffern die Zahl, worzu der Logarithmus gehöret, bestehe, indeme die Anzahl derer Ziffern einer Zahl immer um 1 mehr, als die Kennzahl ihres Logarithmus ist.

Z. E. Der Logarithmus 0. 3010300 zeiget an, daß seine Zahl aus einer Ziffer bestehe.

Der Logarithmus 1. 0000000 ingleichen.

Der Logarithmus 1. 0413927 zeiget an, daß seine Zahl aus zwo Ziffern bestehe.

Der Logarithmus 2. 0043214, daß seine Zahl aus drei,

Der Logarithmus 3. 0021661, daß seine Zahl aus vier,

Der Logarithmus 4. 0004775, daß seine Zahl aus fünf Ziffern bestehe.

§. 467. Ist der Logarithmus zu einer Zahl, welche sich zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 20, zwischen 20 und 30 u. s. f. befindet, bekant, so kan man alsdann auch die

Loga=

Logarithmen sothaner Zahl, wann sie 10= 100= 1000fach u. s. f. genommen wird, ohne die Tabelle finden, weil die Kennzahl so oft um 1, als die Zahl 10fach, erhöhet wird.

Z. E. Der Logarithmus	zu	2 ist:	0. 3010300, dahero
ist er	zu	20 :	1. 3010300
	zu	200 :	2. 3010300
	zu	2000 :	3. 3010300
	zu	20000 :	4. 3010300
	zu	200000 :	5. 3010300, u. s. f.
Item: Der Logarithmus	zu	3 ist:	0. 4771213, mithin
ist er	zu	30 :	1. 4771213
	zu	300 :	2. 4771213
	zu	3000 :	3. 4771213
	zu	30000 :	4. 4771213
	zu	300000 :	5. 4771213, u. s. f.
Item: Der Logarithmus	zu	11 ist:	1. 0413927, folglichen
ist er	zu	110 :	2. 0413927
	zu	1100 :	3. 0413927
	zu	11000 :	4. 0413927
	zu	110000 :	5. 0413927
	zu	1100000 :	6. 0413927, u. s. f.

§. 468. Auf gleiche Weise werden rükweegs die Logarithmen zu den Zahlen, welche sich zehnfach vermindern, gefunden, ob sich gleich die kommende Brüche in den Tabellen nicht befinden.

Z. E. Der Logarithmus	zu	1600 ist:	3. 2041200, mithin
ist er	zu	160 :	2. 2041200
	zu	16 :	1. 2041200
	zu	$1\frac{3}{5}$:	0. 2041200, dann 16 mit 10 dividirt, ist $1\frac{3}{5}$.
Item: Der Logarithmus	zu	1500 ist:	3. 1760913, folglichen
ist er	zu	150 :	2. 1760913
	zu	15 :	1. 1760913
	zu	$1\frac{1}{2}$:	0. 1760913

§. 469. Wie zu allen und jeden beliebigen Zahlen von 1 bis 20000 die Logarithmen zu finden, solches zeigen die Tabellen (§. 464).

§. 470. Sol zu einer vermischten Zahl der Logarithmus gesuchet werden, so wird dieselbige eingerichtet, d. i. einerleinahmig resolviret, und ein Scheinbruch formiret, alsdann zu dem Zähler und Nenner die Logarithmen aus der Tabelle genommen, und voneinander subtrahirt, der Rest ist alsdann der verlangte Logarithmus.

Z. E. $37\frac{1}{4}$

149 Hierzu ist der Logar. 2. 1731863

4 Hierzu . . . 0. 6020600

1. 5711263 ist der Logar. zu $37\frac{1}{4}$.

§. 471. Wil man aber den Logarithmus für einen ächten Bruch haben, so wird der Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers subtrahirt, der Rest zeiget alsdann den Logarithmus des Bruchs an.

Z. E. Wann zu $\frac{3}{4}$ der Logarithmus gesuchet werden sol, so findet man zu 4 den Logarithmus: 0. 6020600, und zu 3 den Logarithmus: 0. 4771213; jenen von diesem zu subtrahiren, gehet nicht an, dahero muß man diesen von jenem subtrahiren, um zu sehen, wie viel diesem fehle, um jenem gleich zu sein:

0. 6020600

0. 4771213

. 1249387 fehlet, mithin ist der Logarithmus zu $\frac{3}{4}$: — 0. 1249387, d. i. — $\frac{1249387}{10000000}$.

Item: Zu $\frac{1}{4}$ den Logarithmus zu suchen, so ist bekant, daß 1 zum Logarithmus Nullen, oder Nichts, hat, folglichen der Logarithmus um so viel weniger sein muß, als der Logarithmus des Nenners ist, als: Der Logarithmus zu $\frac{1}{4}$ ist — 0. 6020600: zu $\frac{1}{10}$ ist er — 1, zu $\frac{1}{100}$ ist er — 2 u. s. f. woraus erhellet, daß der Logarithmus zu einem würklichen Bruch allezeit eine negative Grösse ist.

Daß aber der Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers subtrahirt werden muß, ist ganz begreiflich; dann wann der Zähler durch den Nenner dividirt wird, so komt zum Quotienten der Bruch, als: 3 durch 4 dividirt kommen $\frac{3}{4}$, mithin muß auch der Logarithmus von 4, vermög der Division, von dem Logarithmus von 3 subtrahirt werden.

§. 472. Wil man zu einer grössern Zahl, als die gegenwärtige Tabellen (§. 464) enthalten, und die nicht, wie vorhin §. 467, zehnfach erhöhet ist, den Logarithmus haben, so wird solcher also gesucht:

1) Dividirt man die Zahl mit 10, d. i. man schneidet eine Ziffer ab, um dieselbige in den Tabellen zwischen 1000 und 20000 finden zu können;
2) suchet die Differenz zwischen dem Logarithmus des Quotienten und dem Rest, welcher für ein Ganzes genommen wird, und dem Logarithmus des Quotienten ohne den Rest;
3) multiplicirt sothane Differenz mit dem bei dem Dividiren mit 10 erhaltenen Rest; und addirt endlich
4) das Product, dabei der Bruch ein Ganzes gilt, zu dem Logarithmus des Quotienten.

Nota. So lange eine Zahl, zu welcher der Logarithmus gesuchet werden sol, aus 5 Ziffern bestehet, wird dieselbige mit 10 dividirt, bestehet sie aber aus 6 Ziffern, so geschiehet solches mit 100, aus 7 Ziffern mit 1000 u. s. f.

Z. E. Zu der Zahl 20001 wird der Logarithmus also gesucht:

10) 2000| $\frac{1}{10}$ Weil der Bruch für 1 genommen wird, so ist der Quotient 2001.

Zu dem Quotienten mit dem Rest, nemlich 2001, ist der Logarithmus 3.3012471
Zu dem Quotienten ohne den Rest, nemlich 2000, ist der Logarithmus 3.3010300

Differenz: 2171 mit $\frac{1}{10}$ multiplicirt.

$217\frac{1}{10}$ wird für 218 genommen.

Der Logarithm: zu 2000 ist: 3.3010300
218 addirt, mithin ist
der Logarithmus zu 20001: 4.3010518; dann weil die Zahl aus 5 Ziffern bestehet, so muß die Kennzahl 4 sein (§.466 u. f.).

 Item:

Item: Zu 245645 wird der Logarithmus gesucht:

100) 2456|$\frac{45}{100}$ | Also ist der Quotient: 2457.

Zu 2457 ist der Logar. 3. 3 9 0 4 0 5 2
Zu 2456 ist der Logar. 3. 3 9 0 2 2 8 4

Differenz: 1 7 6 8 mit $\frac{45}{100}$ multiplicirt.
45

8 8 4 0
7 0 7 2

100) 7 9 5|$\frac{60}{100}$|Quotient, ist: 796.

Der Logarithmus zu 2456 ist: 3. 3902284
796 addirt.

3. 3903080 ist der Logarithmus zu der Zahl 245645; dann weil diese Zahl aus 6 Ziffern bestehet, so muß die Kennzahl 5 sein (§. 466 u. f.).

Daß vorstehende gefundene Logarithmen richtig seien, wird aus folgendem Rükweeg erhellen:

§. 473. Sol zu einem jeden gegebenen Logarithmus seine gehörige Zahl gesuchet werden, so wird in der Tabelle der Logarithmus, der dem gegebenen Logarithmus am näheſten komt, (die Kennzahl ausgenommen,) gesuchet, und von jenem Gegebenen subtrahirt, sodann der gefundene Logarithmus von dem in der Tabelle Nächstfolgenden abermahl subtrahirt, die erste Differenz mit 10 multiplicirt, und das Product durch die zweite Differenz dividirt, der Quotient ist alsdann die noch fehlende Ziffer, welche der Zahl beigefüget wird.

Z. E. Was gehöret für eine Zahl zu dem Logarithmus: 4. 3010518?

Gegebener Logarithmus: 4. 3010518
In der Tabelle befindlicher Logar. so jenem am nächsten komt, und zu der Zahl 2000 gehöret 3. 3010300

218 Erste Differenz.

Zu

Zu 2000 ist also der Logarithmus: 3.3010300, und zu der folgenden Zahl 2001 ist derselbe: 3.3012471, wovon jener subtrahirt wird:

3.3012471
3.3010300
2171 Zweite Differenz.

Erste Differenz: 218 mit 10 multiplicirt.

Zweite Differenz: 2171) 2180 | 1 Quotient.
2171
9 Rest, welcher wegbleibt.

Zu 20000 den Quotient 1 gefüget, komt wiederum die Zahl: 20001, zu welcher vorhin der Logarithmus gesuchet worden.

Nota. So lange die Zahl, welche gesuchet werden sol, aus 5 Ziffern bestehet, wird mit 10 multiplicirt; bestehet sie aus 6, mit 100; aus 7, mit 1000 u. f. Aus wie viel Ziffern aber die zu suchende Zahlen bestehen müssen, solches zeigen die Kennzahlen der gegebenen Logarithmen (§. 466 u. f.), wovon das Gegentheil §. 471 zu sehen.

Z. E. Was gehöret für eine Zahl zu dem Logarithmus 5.3903080?

Gegebener Logarithmus: 5.3903080
In der Tabelle befindlicher Logar. so jenem am nächsten komt, und zu der Zahl 2456 gehöret . . 3.3902284
796 Erste Differenz.

Zu 2456 ist also der Logarithmus: 3.3902284, und zu der folgenden Zahl: 2457, ist er: 3.3904052, von welchem jener subtrahirt wird:

3.3904052
3.3902284
1768 Zweite Differenz.

Erste Differenz: 796 mit 100 multiplicirt.

Zweite Differenz: 1768) 79600 | 45 Quotient.
7072
8880
8840
40 Rest, welcher wegbleibt.

Zu 2456 den Quotienten 45 gefüget, komt wiederum die Zahl: 245645, zu welcher vorhin der Logarithmus gesuchet worden.

§. 474. Nachdem nun dasjenige, was zur Kentnis der Logarithmen nöthig ist, angezeiget worden, so folget für Anfängere eine practische Anwendung der erwählten Tabelle (§. 464) in folgenden Vorgaben:

1) 625 mit 25 zu multipliciren (§. 447).

Zu 625 ist der Logarithmus: 2.7958800
Zu 25 ist derselbe 1.3979400

Die Summe: 4.1938200

Dann was bei dem Addiren der Logarithmen über 7 Ziffern komt, muß zu der Kennzahl genommen werden (§. 465. 466).

Mit diesem gefundenen Logarithmus gehet man nun in die Tabelle, und suchet, wo die Kennzahl 4 vorstehet, solchen auf, welcher dann das Product obiger beiden Factoren, nemlich 15625, anzeigen muß; dabei noch zu merken ist, daß die Kennzahl bei dem Gebrauch der Tabelle allezeit vorgesezet werden muß, ob sie gleich in der Tabelle, Wohlstandes halber, nur in gewisser Ordnung vorstehet.

Item: 729 mit 346 zu multipliciren.

Zu 729 ist der Logarithmus: 2.8627275
Zu 346 ist derselbe . . . 2.5390761

Die Summe: 5.4018036

Da hier die Kennzahl 5 ist, mithin das Product aus 6 Ziffern bestehen muß (§. 466), so überschreitet solches gegenwärtige Tabelle; dahero Anfängere dadurch Gelegenheit nehmen können, solche nach gegebener Anweisung §. 472 zu vergrössern, dabei sie zugleich die Ursache erkennen werden, warum die beide lezte Ziffern, oder Nullen, durch einen Punct abgesondert sind.

Item: $37\frac{1}{4}$ mit 108 zu multipliciren (§. 470).

149 Hierzu ist der Log. 2.1731863
4 Hierzu . . . 0.6020600 subtrahirt.

1.5711263
Von 108 ist der Logarithmus: 2.0334238

3.6045501 Dieser Logarithm. zeiget in der Tabelle die Summe: .4023, dabei zu merken ist, daß zween Factoren zum Product eine ganze Zahl bringen müssen, widrigenfalls solche bei den Logarithmen keine statt finden.

2) 16875

2) 16875 durch 15 zu dividiren (§. 448).

Zu 16875 ist der Logarithmus : 4. 2272438
Zu 15 ist derselbe 1. 1760913

3. 0511525

Dann gleichwie vorhin die erhaltene Kennzahl addirt wurde, also muste solche gegenwärtig subtrahirt werden, da dann die erhaltene 3 anzeiget, daß der Quotient aus vier Ziffern bestehen müsse (§. 466).

Mit diesem gefundenen Logarithmus gehet man in die Tabelle, und suchet solchen auf, welcher dann den Quotienten 1125 anzeigen wird.

3) 103 sol quadrirt werden (§. 449).

Zu 103 ist der Logarithmus: 2. 0128372

Das Zweifache: 4. 0256744

Welcher Logarithmus in der Tabelle das Quadrat 10609 anzeigen muß.

4) 24 zu cubiren (§. 450).

Zu 24 ist der Logarithmus: 1. 3802112

Das Dreifache: 4. 1406336

Dann da bei dem Multipliciren zur Kennzahl 1 entsprungen, und 1 mit 3 multiplicirt wurde, so kam 4 zur Kennzahl.

Dieser Logarithmus zeiget in der Tabelle die Cubiczahl 13824.

Auf solche Weise wird eine Zahl immer zu einer höhern Potenz erhaben (§. 80).

5) Aus 10609 die Quadratwurzel zu ziehen (§. 451).

Zu dieser Zahl ist der Logarithmus : 4. 0256744

Mit 2 dividirt: 2. 0128372

Dieser Logarithmus zeiget in der Tabelle die Quadratwurzel 103 an.

6) Aus 13824 die Cubicwurzel zu ziehen (§. 452).

Zu dieser Zahl ist der Logarithmus: 4. 1406336

Mit 3 dividirt: 1. 3802112

Dann 3 in 4 brachte 1, und 1 blieb übrig, alsdann 3 in 11 gab 3 u. s. f.

Dieser erhaltene Logarithmus zeiget in der Tabelle die Cubicwurzel 24 an.

Auf solche Weise wird die Wurzel aus einer jeden höhern Potenz gezogen (§. 452), so weit es nemlich die Tabelle zulässet.

§. 475. Sonderlich können die Säze bei der Regel de Tri, wo dieselbige bei einer Vorgabe oft angebracht werden muß, durch die Logarithmen vortheilhaft multiplicirt und dividirt werden, als z. E. bei dem Interessurio, oder Interesse von Interesse (§. 342), Rabatt von Rabatt u. dgl.

Z. E. Von einem Capital von 1800 fl. das 24 Jahr zu 4 pro Cento gestanden, sind die jährige Interessen allezeit wieder zum Capital geschlagen worden. Fr. Wie hoch ist das Capital also angewachsen?

Nach der gemeinen Regel de Tri müsten hier 24 Säze gemacht werden: nach der Kettenregel ist es leichter, nach den Logarithmen aber noch kürzer und leichter.

Der erste Saz ist:

fl.		fl.		fl.
100	——	104	——	1800

Log. v. 100 ist: 2.0000000. Der Log. v. 104 ist: 2.0170333

24fach.	24fach.	
48.0000000	8.0681332	
	40.340666	
	48.4087992	Hierzu den
Logar. v. 1800)	3.2552725	Logar. von 1800 addirt,
	51.6640717	vermög der
	48.0000000	Multiplic. (§. 447), u.
	3.6640717	alsdann, vermög der

Division (§. 448), den 24fachen Log. des ersten Satzes subtrahirt.

Mit diesem Logus (so heisset diese Zahl, weil sie der Logarithmus noch nicht selber ist, sondern durch welche derselbe gesuchet wird), gehet man in die Tabelle, und suchet den Logarithmus, d. i. die Zahl, welche ihm am nächsten komt, die aber nicht mehr, sondern weniger als derselbe, sein muß, und hier 3.6639835 ist, mithin das Capital von 4613 fl. anzeiget: alsdann nimt man den Unterschied zwischen dem Logus und dem Logarithmus zum Zähler, und den Unterschied zwischen dem Logarithmus und dem nächstfolgenden Logarithmus zum Nenner, so hat man die übrige Theile zum Facit, also:

Logus:

Logus: 3.6640717 Nächstfolgender Log. 3.6640776
Logarithm. 3.6639835 Log. 3.6639835

Zähler: 882 Nenner: 941

Nenner: 941

882
60

941) 52920 | $56\frac{224}{941}$ kr.
4705

5870
5646

224

Item: Ein Capital von 1600 fl, so erst in 10 Jahren eingezogen werden kan, wil man zu $4\frac{1}{2}$ pro Cento Rabbat von Rabbat annehmen. Fr. Wie viel ist contante Zahlung?

Bei dieser Vorgabe kan der zweite Saz eingerichtet, d.i. nebst dem Ersten gegrössert, und alsdann eben wie vorhin procediret werden, oder man kan auch den Logarithmus zum zweiten Saz nach §.470 suchen, und sodann wie vorhin verfahren.

fl. 100 ——— fl. 100 ——— fl. 1600

200 $-4\frac{1}{2}$

$95\frac{1}{2}$

191

Logar. zu 200) 2.3010300 Logar. zu 191) 2.2810334 Mit 10 mult.
10 10

23.0103000 . . . . 22.8103340 Hierzu den
Logar. zu 1600) 3.2041200 Logarithmus von 1600 addirt.
26.0144540
23.0103000

Logus: 3.0041540, welcher den

Logus: 3.0041540 Folg. Logar. 3.0043214 Logar. 3.0038912 zu erkennen gibt, der die Summe von 1009 fl. anzeiget.
Logar. 3.0038912 3.0038912

Zähler: 2628 Nenner: 4302

Nenner: 4302

2628
60

4302) 157680 | $36\frac{2808}{4302}$ | $\frac{156}{239}$ kr. (18)
12906

28620
25812

2808

§. 476. Da man sich §. 330 bei Aufsuchung der Anzahl derer Glieder einer geometrischen Progression auf die Logarithmen beruffen hat, so folget dieselbige hier.

Z. E. Aus wie viel Gliedern bestehet eine geometrische Progression, wann zum ersten Glied 4, zum Verhältnis 3, und zum lezten Glied 2916 genommen wird (s. §. 327 Not.)?

Die allgemeine Formel hievon ist nach §. 329:

$$\frac{Lam^{n-1} - La}{Lm} + 1$$

die Resolution aber also:

Von 2916 ist der Logarithmus: 3.4647875, hiervon wird subtrahirt der Logarithmus von 4: 0.6020600

durch den Logar. v. 3 wird div. 0.4771213) 2.8627275 | 6
2.8627278 + 1
7 Glieder.

Dann 4 in 28 kan aufs Höchste 6 genommen werden, wobei die lezte Ziffer 5 um 3 zu wenig ist, welches aber in allen dergleichen Fällen geschiehet.

Z. E. Der Logarithmus vom nächstvorhergehenden Glied dieser Progression 972 ist 2.9876663
Vom ersten Glied 4 . . . . . . 0.6020600

durch den Logarithmus von 3 wird divid. 2.3856063
0.4771213) 2.3856065 | 5
+ 1
6 Glieder.

Dann 4 in 23 kan aufs Höchste 5 genommen werden, wobei die lezte Ziffer 3 um 2 zu wenig ist.

Es könte zwar der nüzliche Gebrauch der Logarithmen noch bei mehreren Fällen, sonderlich bei Verfertigung allerlei Tabellen, gezeiget werden; weil aber hier der Ort nicht darzu ist, sondern zur besonderen Anwendung der Arithmetic gehöret, welche, so GOtt wil, mit nächstem dem Druk übergeben werden sol, so wird der Liebhaber desfals bis dahin zur Gedult verwiesen.

§. 477. Hier aber ist noch anzuzeigen, was man bei den Logarithmen in Absicht auf die Algebra hauptsächlich zu merken habe.

§. 478. Wann der Logarithmus von einer Grösse angezeiget werden sol, so wird vor dieselbige der Buchstab L gesezet.

Z. E. Man wolte den Logarithmus von der Grösse a oder ab und dergl. anzeigen, so wäre die Bezeichnung La, oder Lab, welches heisset: Der Logarithmus von a, oder von ab, d. i. von den Wehrten, so diesen Buchstaben zugeeignet worden (§. 6), oder denselben willkührlich gegeben werden können (§. 12).

§. 479. Sind die Logarithmen von zwo Grössen durch $+$ zusammengesezet, so ist das Product der Grössen der Summe der Logarithmen gleich (s. §. 447).

Z. E. Wann man die Logarithmen von a und b addirt, so ist die Summe der Logarithmus zu dem Product von a und b, also:

$$La + Lb = Lab$$

§. 480. Sind die Logarithmen zwoer Grössen durch $-$ subtrahirt, so ist der Quotient der Grössen dem Rest der Logarithmen gleich (s. §. 448).

Z. E. Wann man den Logarithmus von a von dem Logarithmus von b subtrahirt, so ist der Rest der Logarithmus zum Quotienten, wann b durch a dividirt wird, also:

$$Lb - La = L\frac{b}{a}$$

§. 481. Wann eine Grösse in eine Potenz erhaben ist, und man multiplicirt den Logarithmus von ihrer Wurzel mit dem

dem Exponenten, der Grösse, so ist das Product gleich dem Logarithmus von sothaner Grösse (s. §. 449. 450).

Z. E. Die in die Potenz erhabene Grösse sei a^6, oder c^n; wird nun die Wurzel a, oder c, mit dem Exponenten 6, oder n, multiplicirt, d. i. a, 6, oder c, n mahl genommen, so ist das Product gleich dem Logarithmus von der Grösse, welche in die Potenz erhaben worden, als:

$$6\,La = La^6, \text{ oder } nLc = Lc^n$$

§. 482. Wird der Logarithmus einer in eine Potenz erhabenen Grösse mit dem Exponenten dividirt, so ist der Quotient dem Logarithmus ihrer Wurzel gleich (s. §. 451. 452).

Z. E. Wann der Logarithmus von c^n mit dem Exponenten n dividirt wird, so ist der Quotient der Logarithmus von c, also:

$$\frac{Lc^n}{n} = Lc, \text{ oder, welches einerlei: } \frac{nLc}{n} = Lc.$$

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schirmer, Johann Michael

Johann Michael Schirmer Schul- Schreib- und Rechenmeisters in Frankfurt am Main selbstlehrende Algebra das ist gründliche Anweisung wie ein jeder welcher die gemeine Rechenkunst verstehet diese vortrefliche Wissenschaft ohne mündlichen Unterricht lernen und mittelst derselben alle schwere
Bd.: 2.

Frankfurt am Main (1779)

Math.p. 501-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082732-1
VD18 90246403